

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

Soluciones analíticas aproximadas de la ecuación de Black - Scholes mediante el Método de Líneas y el Método de Perturbación Homotópica

por

Christian Duque Sánchez

Tesis de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Director:

José Rodrigo Gonzalez, Ph.D

Línea de Investigación:

Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales

Universidad Tecnológica de Pereira

Maestría en la Enseñanza de la Matemática

Pereira, Colombia

Diciembre 2016

Dedicatoria

Este trabajo esta dedicado a dios quien me ilumino en los momentos más difíciles, a mis hijos Ian y Maia quienes son el motor que me impulsa a seguir adelante cada día, a mi familia quienes siempre me apoyaron y tuvieron paciencia y a Erika, quien ha estado conmigo desde que comencé la idea de este proyecto de vida.

Resumen

Las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas hacen parte de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (PDE) no lineales, las cuales por su comportamiento aleatorio son difíciles de resolver analítica y numéricamente; una de ellas, es conocida desde el año de 1973 como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes la cual determina la valoración de bienes y/o activos denominados opciones financieras [1, pág 32]. El desarrollo del presente trabajo consiste en encontrar aproximaciones numéricas a la solución mediante dos métodos como lo son el Método de Líneas (MOL) [2-4] y el Método de Perturbación Homotópica (HPM) [5, 6]. La metodología que se utilizó para realizar lo antes mencionado se basó en un estudio analítico de la solución clásica de la ecuación diferencial parcial de Black - Scholes y posteriormente se propuso otras formas de solución haciendo uso de la teoría de las transformadas integrales y se emplearon métodos numéricos y algoritmos.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales parciales estocásticas, Ecuación De Black-Scholes, Método de Líneas, Método de perturbación Homotópica, transformadas integrales.

Abstract

The Stochastic Partial Differential Equations are part of a set of non-linear partial differential equations (PDE), which by their random behavior are difficult to solve analytically and numerically; One of them, has been known since the year 1973 as the Black-Scholes PDE which determines the valuation of goods and/or assets called financial options. The development of the present work is to find numerical approximations to the solution by two methods, such as the Method of Lines (MOL). The methodology used to perform the mentioned before was based on an analytical study of the classic solution of the partial differential equation of Black - Scholes and subsequently was proposed other forms of solution, making use of the theory of integral transformations and were used numerical methods and algorithms.

Keywords: Stochastic Partial Differential Equations, Black-Scholes Equation, Method of Lines , Homotopy Perturbation Method, integral transformations.

Agradecimientos

A mi director de tesis José Rodrigo Gonzalez, Ph.D por su constante ayuda y conocimiento brindando permitio la culminación de este proyecto.

A mis compañeros de la Universidad, en especial a mi gran amigo Mauricio Morales quien con su conocimiento en el software MATLAB hizo que se obtuvieran los resultados buscados.

A mis padres y hermano quienes siempre me brindaron su apoyo incondicional y me alentaron a culminar este proyecto.

Contenido

Resumen	II
Agradecimientos	IV
Introducción	1
1. Procesos estocásticos	5
1.1. Preliminares	5
1.1.1. Movimiento Browniano	6
1.1.1.1. Movimiento geométrico Browniano	7
1.1.2. Calculo estocástico	8
1.1.3. Modelo de Black - Scholes	10
1.2. Conceptos necesarios de la teoría de opciones	10
2. Deducción de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	13
2.0.1. Dinámica de un portafolio	14
2.0.2. Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes	16
2.0.3. Análisis de la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes	23
2.0.4. La Volatilidad en la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes	24
2.0.4.1. Teorema de la volatilidad	26
3. Solución de la ecuación diferencial parcial de Black – Scholes mediante sustituciones y la transformada de Fourier	27
3.0.1. Transformada de Fourier	30
3.0.2. Convolución	32
3.0.2.1. Teorema de la convolución	32
4. Método de Líneas y Método de Perturbación Homotópica	36
4.0.1. Aproximación de derivadas por diferencias divididas finitas	36
4.0.2. Aproximación de derivadas para funciones de 2 variables por diferencias divididas finitas	37
4.0.3. Método de Líneas (MOL)	38
4.0.4. Procedimiento del MOL aplicado a la ecuación difusión	39
4.0.5. Procedimiento del MOL aplicado a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	41

4.0.5.1.	Discretización del valor del activo S y las condiciones inicial y de frontera de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	42
4.0.6.	Método de Perturbación Homotópica (HPM)	44
4.0.6.1.	Descripción del método	44
4.0.7.	Procedimiento del HPM aplicado a la ecuación de Fokker-Planck	46
4.0.8.	Procedimiento del HPM aplicado a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	48
5.	Aplicaciones	52
5.0.1.	Método de Líneas aplicado a la ecuación difusión	52
5.0.2.	Método de Líneas aplicado a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	53
5.0.3.	Método de perturbación Homotópica aplicado a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	55
6.	Conclusiones y recomendaciones	58
6.1.	Conclusiones	58
6.2.	Recomendaciones	59
Bibliografía		60

Introducción

Los aspectos teóricos y prácticos del movimiento Browniano son objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas como la botánica, mecánica estadística y más precisamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo en ambientes estocásticos los cuales modelan el comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio, ocupando el 99 % de la teoría de valuación de riesgos e incertidumbres en las decisiones de portafolios y productos derivados [1].

A pesar que el movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de los modelos de riesgos financieros y económicos, esta no puede, por sí mismo, representar el comportamiento de todas las variables financieras que se encuentran en finanzas, como por ejemplo el precio de los activos, ya que estos no parten de cero; para describir el rendimiento (cambio porcentual) del precio de un activo se utiliza el proceso llamado movimiento geométrico Browniano, el cual se obtiene por una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar [1].

Para determinar el precio de un activo subyacente, cuando es conducido por un movimiento geométrico Browniano, Fischer Shffey Black (matemático estadounidense, 11 de enero de 1938-30 de agosto de 1995) y Myron Scholes Samuel (economista matemático canadiense, 1 de julio de 1942), en 1973 [7], desarrollaron el modelo denominado Black-Scholes el cual es reconocido como una de las aplicaciones más importantes del siglo XX en el sector financiero, reconociendo su importancia con el premio nobel de economía en 1997 y que luego fue desarrollada más tarde en compañía de Robert Merton Howard Miller (economista estadounidense, 16 de mayo de 1923, 3 de junio de 2000) y publicada en la tesis doctoral “Theory of Rational Option Pricing”.

El modelo de Black-Scholes es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden de tipo parabólica, la cual mediante cambios de variables se transforma en la ecuación de difusión de calor, cuya solución después de invertir los cambios de variable determina el

valor del precio de una opción europea ¹[1] para su compra y venta en una fecha futura y está dada por:

$$C = C(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r)$$

donde,

C : Valor de la opción.

S_t : Precio de la acción.

t : Fecha de vida del contrato.

K : Precio del ejercicio.

T : Fecha de vencimiento.

σ : Volatilidad.

μ : Rendimiento esperado.

r : Tasa de interés anual.

Los parámetros S_t, t, K, T y μ son valores conocidos que surgen del contrato y de las cotizaciones en el momento de hacer el cálculo del valor de la acción mientras que la tasa de interés r depende de la vigencia de los contratos [9]. La volatilidad σ es una medida de riesgo que se deriva de los cambios en la rentabilidad de las acciones y que por su comportamiento debe ser tratada como una serie temporal y no como un único parámetro que se mantiene fijo a lo largo del tiempo [10], es decir, el valor de la volatilidad se puede expresar como una función $\sigma(S, t)$ debido a la realidad del movimiento financiero. la volatilidad se estima a partir de los datos históricos del mercado, en caso que se sepa el precio de la opción, puede utilizarse para calcular la volatilidad estimada por el mercado [11].

Actualmente uno de los campos con mayor actividad en la Matemática aplicada son las ecuaciones diferenciales parciales dado que permiten resolver gran variedad de problemas que aparecen en ciencia e ingeniería, entre las aplicaciones podemos citar por ejemplo, en la física con ecuación de convección - difusión la cual describe el fenómeno de transformación de las partículas dentro de un sistema físico debido a los procesos de convección y difusión, en la biología con la densidad de población de una especie de

¹Una opción que puede ejercerse solamente durante un período de ejercicio limitado al final de la vida de la opción. Esto contrasta con la opción de tipo americano, que puede ejercerse en cualquier momento. Los términos europea y americana se derivan de las regiones en las que aparecieron estas opciones en primer lugar, pero los términos ya no tienen sentido desde el punto de vista geográfico [8].

peces, donde la especie de peces viven en línea recta y el movimiento de los individuos siguen un movimiento aleatorio, en Química para calcular la distribución de una sustancia química dependiendo del tiempo a lo largo del eje longitudinal de un reactor rectangular y en las economía usando el modelo de Black-Scholes para determinar el precio del bien subyacente [12].

Son varias las soluciones de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes a parte de la clásica [1] que han dado buenos resultados, entre ellas se pueden mencionar algunas soluciones analíticas como las de la simetría de Lie [13], el problema de Cauchy, o por ley de conservación [14], métodos de transformadas integrales como de Mellin [15], Harper [16], Adomian [17] y Fourier [18, 19], y soluciones numéricas como el método Euler Maruyama y el método de Milstein [20, 21].

Este proyecto pretende dar a conocer la solución de la ecuación diferencial de Black-Scholes mediante aproximaciones numéricas, para ello se pretende utilizar métodos numéricos, primero aplicandolos a ecuaciones diferenciales parciales conocidas y luego generalizando los métodos para la ecuación diferencial de Black-Scholes. Los métodos utilizados serán el método de líneas (MOL) [2–4] y el método de perturbación Homotópica (HPM) [5, 6].

Este proyecto se compone de cinco capítulos, de la siguiente manera:

1. En el capítulo 1 se describe la teoría estocástica y la solución de la ecuación diferencial estocástica del movimiento Browniano que conlleva a la deducción del modelo de Black Scholes.
2. En el capítulo 2 se describe la teoría de la dinámica de los portafolios de la cual se deduce la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, se describe además su solución clásica y se hace una verificación de sus condiciones de frontera como también se analiza la incidencia de la volatilidad en esta ecuación.
3. En el capítulo 3 se describe la solución la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes empleando la transformada de Fourier para observar la diferencia con la solución clásica.
4. En el capítulo 4 se encuentra una solución numérica a la ecuación diferencial de Black - Scholes, así como su implementación por medio de algoritmos en un entorno computacional haciendo uso de software libre ; además se muestran algunos ejemplos para ilustrar paso a paso la efectividad de los métodos brindando una ayuda pedagógica.

5. En el capítulo 5 se muestra gráficamente la solución de la ecuación diferencial de Black-Scholes obtenida mediante los métodos numéricos de Líneas y Perturbación Homotópica, además de la solución de los ejemplos citados en el capítulo 4.

Capítulo 1

Procesos estocásticos

1.1. Preliminares

Definición 1.1 (Probabilidad). *El modelo matemático básico de la teoría de la probabilidad es el espacio de la probabilidad que consta de una terna ordenada (Ω, F, P) donde Ω es el **espacio muestral** el cual es el conjunto de todos los posibles resultados, o estados de la naturaleza, de un experimento aleatorio ϵ ; F es una colección no vacía de subconjuntos de Ω llamada σ -Álgebra de Ω , una σ -Álgebra es un conjunto que tiene como elementos a aquellos eventos que contienen información relevante para el experimentador y por ultimo $P : F \mapsto [0, 1]$ denominada medida de la probabilidad la cual satisface los siguientes tres axiomas :[1, pág 20]*

- i. $P(A) \geq 0$ para toda $A \in F$;
- ii. $P(\Omega) = 1$;
- iii. σ – Aditiva, es decir, A_1, A_2, \dots, A_n es una sucesión de eventos disjuntos dos a dos, por lo tanto:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

A la pareja (Ω, F) se le llama **espacio medible** y a

$$Z : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

se le denomina **variable aleatoria** la cual es una función que transforma a los elementos de Ω en números reales.

Definición 1.2 (Proceso estocástico). *Un proceso estocástico es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio. La aleatoriedad del fenómeno se captura a través de un espacio medible (Ω, F) . En este contexto, un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $\{x_t\}_{t \in \tau}$ donde τ es un conjunto, finito o infinito, de tiempos. Cada una de estas variables aleatorias $\{x_t\}$ está definida sobre un espacio medible (Ω, F) y toma valores en otro espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, en donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ -Álgebra de Borel sobre \mathbb{R} . [1, pág 33], [22, pág 4]*

Definición 1.3 (Información generada por un proceso estocástico). *Sea $\{x_t\}$ un proceso estocástico entonces [23]:*

1. *Sea A un evento. Basados en observaciones de la trayectoria $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$ es posible saber si ha ocurrido el evento $A \in F(t)^*$, donde $F(t)^*$ es información generada por el proceso $\{x_t\}$ en $[0, t]$.*
2. *Sea Z una variable aleatoria. Si, se puede determinar el valor de Z basados en observaciones a la trayectoria si $Z \in F(t)^*$.*

Los procesos estocásticos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles, etc.

1.1.1. Movimiento Browniano

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad fijo, el movimiento Browniano (estándar y unidimensional) es una función [1, pág 32, 49]

$$W(t, \bullet) \times \omega \mapsto \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \geq 0$, la función

$$W : [0, \infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

es una variable aleatoria definida en (Ω, F) denotada también como $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Mientras que para cada $\omega \in \Omega$ la función

$$W(\bullet, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

es continua en $[0, \infty)$ llamadas trayectorias y denotadas también como $\omega(t)$.

La familia $\{W_t\}_{t \geq 0}$ satisface adicionalmente las siguientes condiciones:

1. $W_0 = 0$ casi donde quiera (o casi en todas partes), es decir, $P\{\omega \in \Omega | W_0 = 0\} = 1$, es decir el proceso empieza en $t = 0$ con probabilidad 1;
2. Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n$, los incrementos $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son estocásticamente independientes;
3. Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim \phi(0, t - s)$, donde $\phi(0, t - s)$ es la distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2 = t - s$.

Si se tiene que W_t es una variable aleatoria que representa la posición de una partícula en el instante t , las condiciones exigidas para el movimiento Browniano se justifican de la siguiente manera: la partícula sufre pequeños cambios en su posición, se puede suponer que W_t se distribuye de manera normal, el movimiento entre t y $t + s$ depende solo de los choques y no de la posición en que se encuentra la partícula. Lo anterior tal cual como lo observó Robert Brown en el movimiento de un grano de polen suspendido sobre la superficie de un vaso con agua notando que la trayectoria que describía el grano era continua. Luego se demostró que los movimientos ocurrían debido a los choques continuos entre las moléculas del líquido. Posteriormente Albert Einstein demostró que el movimiento a través del tiempo de dicha partícula se podía modelar por medio de una distribución normal, originándose así el movimiento Browniano [1, pag 32], [21, pag 14].

1.1.1.1. Movimiento geométrico Browniano

Aunque el movimiento Browniano es la base para la construcción de modelos de riesgos financieros y económicos, este no puede, representar por sí mismo el comportamiento de todas las variables financieras que se encuentran en finanzas como por ejemplo los precios de los activos ya que estos no parten de cero; para describir el rendimiento (cambio porcentual) del precio de un activo se utiliza el proceso llamado movimiento geométrico Browniano, el cual se obtiene por una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar [1, pág 39].

Sea W_t un movimiento Browniano estándar, μ una constante (**tendencia**), σ una constante positiva (**volatilidad**) y S_0 es un precio inicial conocido, entonces el proceso

$$S_t = S_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}}$$

Es llamado movimiento geométrico Browniano, observese que

$$\ln(S_t) = \ln\left(S_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}}\right)$$

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$$

1.1.2. Cálculo estocástico

Definición 1.4. Una de las herramientas más útiles en las matemáticas financieras modernas es el llamado **cálculo estocástico**, o cálculo de Ito, sobre el cual descansa toda la teoría económica el análisis financiero en tiempo continuo y en ambientes estocásticos y cuyo el objeto de estudio es la integral y no la diferencial. Cuando se escribe una ecuación diferencial estocástica, realmente se está pensando en una integral estocástica, es decir, una ecuación diferencial estocástica es una notación simplificada de una integral estocástica [21][24].

Definición 1.5 (Reglas de diferenciación estocástica). En el cálculo de variables reales, si t es una variable independiente, se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal $(dt)^2$, es una cantidad despreciable, es decir $(dt)^2 = 0$, en otras palabras, si algo es pequeño, entonces su cuadrado es todavía más pequeño; a diferencia del cálculo estocástico, en el cual el cuadrado de una cantidad infinitesimal normal es significativa, es decir, si W_t es un movimiento Browniano estandarizado, entonces por el cálculo estocástico, la integral [1, pag 67]

$$\int_0^t (dW_s)^2 = \int_0^t ds = t$$

puede ser escrita de una forma más simple como $(dW_t)^2 = dt$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} dW_t &= (dt)^{\frac{1}{2}} \\ (dt)(dW_t) &= (dt)(dt)^{\frac{1}{2}} \\ (dt)(dW_t) &= (dt)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

la cual es de nuevo una cantidad despreciable, es decir $(dt)(dW_t) = 0$. Las reglas básicas de la diferenciación estocástica también llamadas reglas empíricas de la diferenciación estocástica se pueden resumir de la siguiente manera:

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

CUADRO 1.1: Reglas básicas de diferenciación estocástica

Definición 1.6 (Integral estocástica (Integral de Ito)). Sea $\{dW_t, \geq 0\}$ un movimiento Browniano unidimensional sobre el espacio de probabilidad (Ω, F, P) . Una integral estocástica unidimensional (o proceso de Ito) es un proceso estocástico $\{X_t, \geq 0\}$ sobre probabilidad (Ω, F, P) [25] tal que

$$S_t = S_o + \int_0^t \mu(S_s, s) ds + \int_0^t \sigma(S_s, s) dW_s,$$

Donde la integral en ds es definida como una integral ordinaria y la integral en dW_s es estocástica [26]; es usual y conveniente expresar dicha ecuación como una ecuación diferencial estocástica de la forma $dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$, siendo S_o una variable aleatoria independiente de todas las variables del proceso de Wiener W_t y $\mu_t = \mu(S_t, t)$ y $\sigma_t = \sigma(S_t, t)$ funciones reales definidas y medibles en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Las soluciones van a depender de la condición inicial, del proceso W_t y del instante t .

Se debe tener siempre en mente que el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica [1, pág 58].

Definición 1.7 (Lema de Ito). *La diferencial estocástica permite, en muchos casos, obtener resultados de manera más rápida y sencilla sobre la integral estocástica, además de que las reglas que se establecen con la notación diferencial y los resultados que de ella se desprenden son consistentes con la propiedad de la integral estocástica.* [1, pág 69]

Considere una función $y = f(S_t, t)$, como $(dW_t)^2 = dt$ entonces la diferencial de $y = f(S_t, t)$ se calcula considerando los términos de segundo orden en una expansión en serie de Taylor que en el caso de variables reales se calcula solo usando los términos de primer orden ya que el producto de cantidades infinitesimales es de orden despreciable pero para diferencial de $y = f(S_t, t)$ se calcula hasta los términos de segundo orden quedando como

$$dy = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} (dS_t) (dt) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right)$$

Reemplazando la diferencial $dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ en la expansión en serie de Taylor se tiene

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} [\mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) dW_t] \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} [\mu^2(S_t, t) (dt)^2 + 2\mu(S_t, t) \sigma(S_t, t) (dt) (dW_t) + \sigma^2(S_t, t) (dt) (dW_t)^2] \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} [\mu(S_t, t) (dt)^2 + \sigma(S_t, t) (dW_t) (dt)] + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Usando las reglas empíricas de la diferenciación estocástica y agrupando los términos de dt y dW_t la ecuación anterior se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) dW_t$$

1.1.3. Modelo de Black - Scholes

El modelo tiene un continuo de períodos $t \in [0, T]$ y consta de dos activos [27]:

- $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ que evoluciona en forma determinística según la ley:

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt, \quad B_0 = 1,$$

donde r es la tasa de interés por unidad de tiempo, B representa un bono.

- El precio de la accin $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ es de evolución aleatoria o contingente según la ley

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW, \quad S_0 = x,$$

donde σ : Volatilidad, μ : Rendimiento esperado y W : Movimiento Browniano.

1.2. Conceptos necesarios de la teoría de opciones

Las opciones son uno de los derivados financieros más importantes, su uso data de mucho tiempo atrás, sin embargo hace varias décadas eran herramientas financieras poco conocidas, puesto que no había un procedimiento para determinar un precio justo de la opción. Los derivados financieros, como su nombre lo indica, son instrumentos cuyo valor se deriva de la evolución de precios de otros activos llamados activos subyacentes. Los derivados pueden subdividirse en contratos adelantados (forwards, futuros), swaps y como se mencionó anteriormente en opciones.

Definición 1.8 (Opción). *Una opción es un acuerdo entre dos personas para vender o comprar un activo en una fecha futura a un precio establecido. La persona que compra la opción tiene derecho a comprar o vender el activo subyacente, mientras el emisor de la opción tiene la obligación de cumplir el contrato, independientemente si le conviene o no; es decir, cuando llega la fecha de vencimiento el comprador de la opción decide si el trato se lleva acabo o no.*

A simple vista, el acuerdo puede ser desventajoso para el que emite la opción, para compensar esto, el que adquiere la opción debe pagar una cantidad llamada prima al vendedor, con el pago de la prima el comprador adquiere derechos y ninguna obligación.

Las opciones pueden ser clasificadas de acuerdo al derecho que otorgan o en función del momento en que pueden ejercerse.

Cuando las opciones son clasificadas dependiendo el tiempo en que pueden ser cobradas, resaltan dos tipos de opciones:

Definición 1.9 (Opción europea). *Es aquella que sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento.*

Definición 1.10 (Opción americana). *Es aquella que puede ejercerse en cualquier momento, a partir de la fecha en que se realiza el acuerdo hasta la fecha del vencimiento.*

Cuando las opciones son clasificadas de acuerdo al derecho que otorgan, existen dos tipos, estos son:

- **Opción de compra (option call):** *Es aquella que otorga al propietario el derecho, más no la obligación de comprar un activo a un precio K determinado, en una fecha futura T determinada.*
- **Opción de venta (option put):** *Es aquella que otorga al propietario el derecho, más no la obligación de vender un activo a un precio K determinado, en un tiempo T futuro también determinado.*

En la deducción de la prima de una opción, influyen varias variables como el precio del ejercicio, el tiempo de vida del contrato, el interés y la volatilidad. Esta última juega un papel importante en el modelo de Black Scholes, a continuación se define el concepto.

Definición 1.11 (Volatilidad). *Se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Estadísticamente es la dispersión del rendimiento del activo subyacente, definiendo como rendimiento a las variaciones del precio.*

La volatilidad se puede clasificar en tres tipos:

1. **Volatilidad histórica:** Si un operador pretende utilizar un modelo teórico de precios á realizar la estimación más acertada sobre la volatilidad futura. un punto de partida para ello es calcular sobre la base de la información pasada.
2. **Volatilidad futura:** Es el dato que a cualquier operador en opciones le gustaría conocer. Con él, se puede valorar correctamente las opciones y ganar dinero aprovechando los errores en las expectativas de otros agentes. en teoría este es el dato de volatilidad que se ingresa en el modelo teórico de precio. los operadores raramente hablan de volatilidad futura ya que es imposible saber lo que depara el destino.
3. **Volatilidad implícita:** A diferencia de la volatilidad futura e histórica que están asociadas a un contrato subyacente, la volatilidad implícita se asocia con una opción. La volatilidad implícita es una conjunción de las expectativas sobre la

volatilidad futura que poseen los operadores del mercado. Esta se vería reflejada en el precio de las opciones, es decir, en su prima.

Capítulo 2

Deducción de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

La ecuación de Black-Sholes es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólica y lineal cuando el precio del activo subyacente (una acción) es conducida por un movimiento geométrico Browniano, su solución determina el precio de una opción financiera cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento. Representa la base para valuar muchos y muy diversos productos derivados, ya que las diferentes condiciones representan los precios de los distintos derivados financieros. [1, pág 203]

Los supuestos básicos del modelo de Black-Sholes son:

- i. El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
- ii. El precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano.
- iii. La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo.
- iv. Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas.
- v. El mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción del título
- vi. No hay costos de transacción (comisiones e impuestos);

- vii. El mercado opera en forma continua, es decir, no hay sábados, domingos ni días festivos.
- viii. Existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa).
- ix. Todos los agentes comparten exactamente la misma información, es decir, la información es simétrica.
- x. Los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

El valor, o precio de una opción de compra es claramente función de los distintos parámetros que intervienen en los términos o cláusulas del contrato, dicho de otra manera el valor de una opción se puede escribir como [1, pág 204]:

$$C = C(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r), \quad (2.1)$$

donde: C : Valor de la opción, S_t : Precio de la acción, t : Fecha de vida del contrato, K : Precio del ejercicio, T : Fecha de vencimiento, σ : Volatilidad, μ : Rendimiento esperado, r : Tasa de interés anual.

Observe que S_t y t son las variables relevantes en el contrato, (de no ser necesario no se hará mención explícita de los parámetros K, T, r, σ y μ), es decir, el valor de la opción se denotará simplemente como $C = C(S_t, t)$.

Durante el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$ el activo subyacente cambia de S_t a $S_t + dS_t$, por lo que la opción cambia de $C(S_t, t)$ a $C + dC$, donde dC es el cambio marginal en el precio el cual se obtiene mediante el lema de Ito [1, pág 69] teniendo en cuenta que $dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ y las reglas empíricas de la diferenciación estocástica:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t} \mu(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) dW_t.$$

2.0.1. Dinámica de un portafolio

Sea ω_1 el número de unidades del activo subyacente (acciones) de precio S_t y ω_2 el número de unidades de opción de compra (bonos) sobre el subyacente de precio $C(S_t, t)$. El valor actual del portafolio esta dado como:

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 C(S_t, t).$$

Debido a las fluctuaciones propias del mercado, el cambio en el valor del portafolio durante un instante dt esta dado por:

$$d\Pi_t = \omega_1 dS_t + \omega_2 dC(S_t, t),$$

Sustituyendo dS_t y dC y agrupando trminos se obtiene:

$$d\Pi_t = \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t + \omega_2 \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt,$$

donde los términos de dt se denominan **términos de tendencia** y los de dW_t se denomina **término aleatorio** el cual modela el riesgo del mercado del portafolio, el cual se puede eliminar eligiendo adecuadamente las cantidades ω_1 y ω_2 de tal manera que se anule el termino estocástico de la ecuación, es decir

$$\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} = 0,$$

para lo cual existen infinitas posibilidades, si se toma por ejemplo $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\frac{\partial C}{\partial S_t} = -\delta$, se obtiene entonces:

$$d\Pi_t^{(\delta)} = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt.$$

Esta elección particular de $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\delta$ se conoce como **cobertura Delta**, la cual es una cobertura dinámica, ya que durante el periodo $[t, t + dt]$, la cantidad $\frac{\partial C}{\partial S_t}$ cambia con S_t y t , por lo tanto el valor del portafolio se comporta de la forma:

$$\Pi_t^{(\delta)} = C - \delta S_t.$$

Si la cantidad $\Pi_t^{(\delta)}$ se deposita en un banco que paga una tasa de interés r , entonces el cambio en el valor del portafolio, durante dt , está dado por la ecuación:

$$d\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\delta)} r dt = (C - \delta S_t) r dt,$$

en este caso, dt es el tiempo en que se aplica la tasa r .

Si existen oportunidades de generar ganancias (oportunidades de arbitraje) libres de riesgo, entonces los mercados no están en equilibrio. Recíprocamente, si los mercados están en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje. Por lo tanto bajo el supuesto de equilibrio general, se tiene:

$$d\Pi_t^{(r)} = d\Pi_t^{(\delta)}$$

Sustituyendo los valores de $d\Pi_t^{(r)}$ y $d\Pi_t^{(\delta)}$ en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt &= \left(C - \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t \right) r dt \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r - rC &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

La cual es conocida como la **Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes**. Las condiciones de frontera e inicial para determinar una solución única están dadas por

Condiciones de Frontera:

$$C(0, t) = 0, \quad C(S_t, t) \approx S_t \quad \text{cuando} \quad S_t \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Condicion Inicial:

$$C(S_t, T) = \max(S_t - K, 0). \quad (2.4)$$

El hecho de que la ecuación diferencial parcial sea de tipo parabólica significa que está relacionada con la ecuación de difusión unidimensional, es decir, una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, \tau), \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

junto con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_o(x).$$

2.0.2. Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes

Sea la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r - rC = 0$$

Con las condiciones iniciales dadas por

$$C(0, t) = 0, \quad C(S_t, t) \approx S_t \quad \text{cuando} \quad S_t \rightarrow \infty,$$

$$C(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$$

Considerando el siguiente cambio de variables

$$C(S_t, t) = f(t) g(u_1, u_2), \quad u_1 = u_1(S_t, t) \quad \text{y} \quad u_2 = u_2(S_t, t),$$

donde $f(t)$ y $g(u_1, u_2)$ son funciones por determinar, de este modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= f'(t)g(u_1, u_2) + f(t) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \right] \\ \frac{\partial C}{\partial S_t} &= f(t) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} &= f(t) \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Reemplazando las derivadas parciales en la ecuación diferencial de Black-Scholes (2.2), se tiene:

$$\begin{aligned} &f'(t)g(u_1, u_2) + f(t) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f(t) \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + r S_t f(t) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right] - r f(t)g(u_1, u_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Suponiendo que $f(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{f'(t)}{f(t)} - r \right) g(u_1, u_2) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2} \right) \right] \\
 & + r S_t \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

De donde se tiene que $\frac{f'(t)}{f(t)} - r = 0$ $f'(t) = r f(t)$ cuya solución es

$$f(t) = e^{-r(T-t)}, \quad f(T) = 1,$$

aquí $f(t)$ representa el valor presente, en t , de una unidad monetaria en T . Si se escoge u_2 de la forma:

$$u_2(S_t, t) = u_2(t) = B(T - t), \quad u_2(T) = 0,$$

siendo B una constante por determinar, se simplifica sustancialmente la ecuación (2.8). observe que u_2 depende sólo del tiempo, de esta manera:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -B \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_2}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2} = 0.$$

En este caso

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) B + \right] \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \right) \right] \\
 & + r S_t \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right] + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) B = 0. \tag{2.10}$$

Donde se puede suponer que $\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}$, de esta forma

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 - B \right] + \frac{\partial g}{\partial u_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right] = 0. \tag{2.11}$$

Suponiendo que el primer paréntesis se anula se tiene que

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 - B, \quad (2.12)$$

de tal manera que podemos afirmar que:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma S_t \frac{\partial u_1}{\partial S_t}, \quad y \quad B = A^2. \quad (2.13)$$

Lo que significa que A^2 se mantendrá constante y positivo. Por lo tanto, u_2 mide el tiempo hacia atrás, es decir se comienza en T y se termina en cero. De esta manera tenemos:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial u_1}{\partial S_t} = 0. \quad (2.14)$$

Esta ecuación difiere de la ecuación diferencial de Black-Scholes (2.2) por el término rC , es decir, el producto del precio de la opción por la tasa de interés libre de riesgo.

De la expresión $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma S_t \frac{\partial u_1}{\partial S_t}$, al despejar el término $\frac{\partial u_1}{\partial S_t}$, se tiene

$$\frac{\partial u_1}{\partial S_t} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma S_t}, \quad (2.15)$$

de esta manera

$$\int du_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \int \frac{dS_t}{S_t} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} (\ln(S_t) - \ln(K)) + D(t), \quad (2.16)$$

donde $\ln(K)$ es la constante de integración y $D(t)$ es una función por determinar; la razón por la que se introduce una nueva constante es la de introducir el precio del ejercicio, por lo tanto

$$u_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + D(t). \quad (2.17)$$

Determinando las derivadas parciales de u_1 con respecto t y S_t se tiene

$$\frac{\partial u_1}{\partial S_t} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left(\frac{1}{S_t} \right); \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left(-\frac{1}{S_t} \right)^2; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = D'(t). \quad (2.18)$$

Al reemplazar en la ecuación (2.14), se tiene

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left(-\frac{1}{S_t} \right)^2 \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} + r S_t \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left(\frac{1}{S_t} \right) + D'(t) = 0. \quad (2.19)$$

Al simplificar la ultima expresión;

$$-\frac{1}{2}A\sigma\sqrt{2} + r\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} + D'(t) = 0. \quad (2.20)$$

Al despejar $D'(t)$

$$D'(t) = \frac{1}{2}A\sigma\sqrt{2} - r\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} = -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \quad (2.21)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es:

$$D(t) = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t), \quad D(T) = 0. \quad (2.22)$$

Por lo tanto, reemplazando en (2.17) se tiene

$$\begin{aligned} u_1(S_t, t) &= \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)\right] \\ &= \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Donde se cumple que

$$S_t = Ke^{\frac{u_1 T \sigma}{A\sqrt{2}}}, \quad \text{siendo} \quad u_{1T} = u_1(S_t, T). \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta que $f(T) = 1$ y $u_2(T) = 0$, se tiene que:

$$C(S_t, T) = f(T)g(u_1(S_t, T), u_2(T)) = g(u_1(S_t, T), 0) = g\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), 0\right). \quad (2.25)$$

Considerando la condición inicial (2.4) de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (2.2) se observa que:

$$C(S_t, T) = \max(S_t - K, 0) = g(u_1(S_t, T), 0) = g\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), 0\right). \quad (2.26)$$

Por lo tanto

$$C(S_t, T) = \max(S_t - K, 0) = \begin{cases} K\left(e^{\frac{u_1 T \sigma}{A\sqrt{2}}} - 1\right) & \text{si } u_{1T} \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_{1T} < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Ya que $S_t > K$ equivale a la condición:

$$e^{\frac{u_1 T \sigma}{A\sqrt{2}}} > 1$$

Esto a su vez implica que $u_{1T} > 0$. Así, $C(S_t, T)$ representa el valor intrínseco de la opción, es decir, el pago de la opción en la fecha de vencimiento. Ahora, sea la ecuación

diferencial parcial:

$$\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}, \quad (2.28)$$

con

$$g = g(u_1, u_2), -\infty < u_1 < \infty, u_2 > 0, \quad (2.29)$$

y

$$g_0(u_1) = \begin{cases} K \left(e^{\frac{u_1 T \sigma}{A\sqrt{2}}} - 1 \right) & \text{si } u_1 T \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_1 T < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Las ecuaciones (2.28)-(2.30) son la ecuación de difusión con sus condiciones iniciales y de frontera cuya solución está dada por:

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) e^{-(x-u_1)^2/4u_2} dx \quad (2.31)$$

Para eliminar la variable temporal u_2 se puede considerar el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{x - u_1}{\sqrt{2u_2}}, \quad dx = \sqrt{2u_2} dy. \quad (2.32)$$

Como $g_0(x) \equiv 0$ para $x \leq 0$. Entonces sustituyendo en (2.31) se tiene

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}} \int_0^{\infty} g_0(x) e^{-\frac{1}{2}((x-u_1)/\sqrt{2u_2})^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}} \int_{-u_1/\sqrt{2u_2}}^{\infty} g_0(u_1 + \sqrt{2u_2}y) e^{-\frac{1}{2}(y)^2} \sqrt{2u_2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_1/\sqrt{2u_2}}^{\infty} g_0(u_1 + \sqrt{2u_2}y) e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy. \end{aligned} \quad (2.33)$$

En virtud de la condición (2.30) de la ecuación de difusión, la ecuación anterior se transforma en

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_1/\sqrt{2u_2}}^{\infty} K \left(e^{\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}(u_1 + \sqrt{2u_2}y)} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy. \quad (2.34)$$

Buscando otra expresión para el limite inferior de integración y para el argumento de la función exponencial en el integrando se llega a

$$\frac{-u_1}{\sqrt{2u_2}} = -\frac{\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left[\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) \right]}{\sqrt{2A^2(T - t)}} = -\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}. \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}(u_1 + \sqrt{2}u_2y) &= \frac{\sigma}{A\sqrt{2}} \left[\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right] + \sqrt{2A^2(T-t)}y \right] \\
&= \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Reemplazando estos resultados en la función $g(u_1, u_2)$ (2.34) se tiene:

$$\begin{aligned}
g(u_1, u_2) &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y - 1\right]} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy \\
&= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)} e^{\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y - 1\right]} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy \\
&= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y\right]} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\Psi &= \left\{ y \mid y > -\frac{u_1}{\sqrt{2}u_2} \right\} \\
&= \left\{ y \mid y > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\
&= \left\{ y \mid -\infty < y < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Dado que $C(S_t, t) = f(t)g(u_1, u_2) = e^{-r(T-t)}g(u_1, u_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
C(S_t, t) &= e^{-r(T-t)} \left[\frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y\right]} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy \right] \\
&= \left[\frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-r(T-t)} e^{\left(r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y\right)} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy \right] \\
&= \left[\frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y - \frac{1}{2}(y)^2\right)} dy - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy \right] \\
&= \left[\frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{(T-t)})^2} dy - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy \right].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Haciendo el cambio de variable $\epsilon = y - \sigma\sqrt{T-t}$ se obtiene:

$$C(S_t, t) = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} dy - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy, \tag{2.40}$$

donde

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left\{ y - \sigma\sqrt{T-t} > -\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}} - \sigma\sqrt{T-t} \right\} \\ &= \left\{ \epsilon | \epsilon > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ \epsilon | -\infty < \epsilon < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\},\end{aligned}\tag{2.41}$$

si la función de densidad de probabilidad normal esta dada por:

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy,\tag{2.42}$$

se tiene el valor de la opción en términos de $\Phi(d_1)$ y $\Phi(d_2)$:

$$C(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)\tag{2.43}$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\tag{2.44}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.\tag{2.45}$$

La ecuación 2,43 se puede reescribir de la forma

$$C(S_t, t) = S_t \Phi(d) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(d - \sigma\sqrt{T-t}\right),\tag{2.46}$$

con

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.\tag{2.47}$$

2.0.3. Análisis de la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes

Se desea hacer un análisis a las condiciones de frontera (2.3), verificando que estas satisfacen la ecuación (2.2).

1. La condición de frontera $C(0, t) = 0$ con $t \in [0, T)$, describe el comportamiento cuando $S = 0$, tomando el limite cuando S tiende a 0 en las ecuaciones (2.44) y (2.45) se observa que d_1 y d_2 tienden a $-\infty$, es decir

$$\lim_{S \rightarrow 0} d_1 = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) = -\infty,\tag{2.48}$$

y

$$\lim_{S \rightarrow 0} d_2 = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) = -\infty. \quad (2.49)$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación (2.42) se tiene $\Phi(d_1) = 0$ y $\Phi(d_2) = 0$, al reemplazarlo en (2.43) cuando S tiende a 0 se obtiene que $\mathbf{C}(\mathbf{0}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ con lo cual queda demostrada.

2. La condición de frontera $C(S_t, t) \approx S_t$, describe el comportarmiendo cuando S_t tiende a ∞ , tomando el límite cuando S tiende a ∞ en las ecuaciones (2.44) y (2.45) se observa que d_1 y d_2 tienden a ∞ , es decir

$$\lim_{S_t \rightarrow \infty} d_1 = \lim_{S_t \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) = \infty, \quad (2.50)$$

y

$$\lim_{S_t \rightarrow \infty} d_2 = \lim_{S_t \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) = \infty. \quad (2.51)$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación (2.42) se tiene $\Phi(d_1) = 1$ y $\Phi(d_2) = 1$, por lo que reemplazando en (2.43) cuando S tiende a ∞ se obtiene la siguiente expresión $C(S_t, t) \approx S_t - Ke^{-r(T-t)} \approx S_t$ con lo cual queda demostrada.

2.0.4. La Volatilidad en la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes

Definición 2.1 (Volatilidad). *La volatilidad mide el nivel de riesgo de un activo a través de la desviación estandar, la cual representa que tan dispersos se encuentran los datos respecto a la media, es decir, representa la posibilidad que los retornos del precio del activo se alejen del valor esperado o mas probable. la Volatilidad puede interpretarse como la fluctuación de los precios del activo subyacente en un periodo de tiempo, que estima la frecuencia e intensidad de los cambios que se dan en el perioso del activo. [10, pág 16]*

Analizando el comportamiento del precio de la opción cuando la volatilidad σ tiende a 0 y a ∞ se observa que:

1. σ tiende a 0, tomando el limite cuando σ tiende a 0 en la ecuación (2.47) se observa que d tiende a ∞ y $-\infty$, es decir

$$\begin{aligned}
 \lim_{\sigma \rightarrow 0} d &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) \\
 &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + r(T - t) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) \\
 &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) - \ln e^{-r(T-t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) \\
 &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K e^{-r(T-t)}} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right).
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Entonces:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d = \infty, \quad \text{si} \quad \ln \left(\frac{S_t}{K e^{-r(T-t)}} \right) > 0, \tag{2.53}$$

es decir

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d = \infty, \quad \text{si} \quad S_t > K e^{-r(T-t)} \tag{2.54}$$

y

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d = -\infty, \quad \text{si} \quad S_t < K e^{-r(T-t)}, \tag{2.55}$$

reemplazando estos resultados en la ecuación (2.42) se tiene

$$\begin{aligned}
 \Phi(d) &= 1, \quad \text{si} \quad d \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad S_t > K e^{-r(T-t)} \\
 \Phi(d) &= 0, \quad \text{si} \quad d \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad S_t < K e^{-r(T-t)}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Por lo tanto la condición inicial está dada por:

$$C(S_t, T) = \max(S_t - K e^{-r(T-t)}, 0) \tag{2.57}$$

2. σ tiende a ∞ , tomando el limite cuando σ tiende a ∞ en la ecuación (2.47) se observa que d tiende a ∞ y $-\infty$, es decir

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} d = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) = \infty \tag{2.58}$$

y

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(d - \sigma \sqrt{T - t} \right) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) = -\infty \tag{2.59}$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación (2.42) se tiene que $\Phi(\infty) = 1$ y $\Phi(-\infty) = 0$, por lo que reemplazando en (2.46) la condición inicial es $C(S_t, t) =$

S_t .

2.0.4.1. Teorema de la volatilidad

Sea $C(S_t, t)$ el valor del precio de una opción definido como una función de clase C^2 y de soporte compacto dada por:

$$C(S_t, t) = S_t \Phi(d) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(d - \sigma \sqrt{T-t}\right).$$

con

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad y \quad \Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy,$$

se puede ver que el valor del precio de la opción esta dado entre el precio del ejercicio $K e^{-r(T-t)}$ y el precio de la acción hoy S_t cuando la volatilidad σ tiende a cero, es decir cuando la acción es libre de riesgo; y es igual al precio de la acción hoy S_t cuando la volatilidad σ tiende a infinito.

Capítulo 3

Solución de la ecuación diferencial parcial de Black – Scholes mediante sustituciones y la transformada de Fourier

Sea

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r - rC = 0.$$

Cuyas condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} C(0, t) &= 0, & C(S_t, t) &\approx S_t \text{ cuando } S_t \rightarrow \infty \\ C(S_t, T) &= \max(S_t - K, 0) \end{aligned}$$

Mediante cambios de variable la ecuación diferencial parcial de Black – Scholes se transforma en la ecuación de difusión de calor, la cual representa el calor en una varilla de longitud infinita después de que se ha calentado en un tiempo inicial, teniendo la solución de esta, se invierten los cambios de variable y así, se determina el precio de la opción.

Sean los cambios de variable

$$S_t = Ke^{x_t}, \tag{3.1}$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \tag{3.2}$$

y

$$\kappa = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \tag{3.3}$$

Por lo tanto, el precio de la opción bajo estos cambios de variable es:

$$C(S_t, t) = Kv(x_t, \tau) \quad (3.4)$$

Se observa de la condición inicial $C(S_t, T)$ que

$$\begin{aligned} C(S_t, T) &= \max(S_t - K, 0) \\ &= \max(Ke^{x_t} - K, 0) \\ &= \max(K(e^{x_t} - 1), 0) \\ &= K\max(e^{x_t} - 1, 0) \\ C(S_t, T) &= Kv(x_t, 0) = G(S_t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$v(x_t, 0) = \max(e^{x_t} - 1, 0), \quad (3.6)$$

de (3.1) y (3.2) se despeja x_t y τ así:

$$S_t = Ke^{x_t}, \quad \text{donde} \quad x_t = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \quad (3.7)$$

y

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad \text{donde} \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \quad (3.8)$$

entonces el precio de la opción queda:

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= Kv(x_t, \tau) \\ &= Kv\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Calculando las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} Kv(x_t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} Kv\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right) \\ &= K \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = K \frac{\partial v}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial S_t} &= \frac{\partial}{\partial t} Kv(x_t, \tau) = \frac{\partial}{\partial S_t} Kv\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right) \\ &= K \frac{\partial v}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial S_t} = K \frac{\partial v}{\partial x_t} \frac{1}{S_t} = \frac{K}{S_t} \frac{\partial v}{\partial x_t} = e^{-x_t} \frac{\partial v}{\partial x_t}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(e^{-x_t} \frac{\partial v}{\partial x_t} \right) = \frac{\partial x_t}{\partial S_t} \frac{\partial}{\partial x_t} \left(e^{-x_t} \frac{\partial v}{\partial x_t} \right) = \frac{1}{S_t} \left(e^{-x_t} \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-x_t} \frac{\partial v}{\partial x_t} \right) \\ &= \frac{1}{Ke^{x_t}} \left(e^{-x_t} \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-x_t} \frac{\partial v}{\partial x_t} \right) = \frac{1}{K} \left(e^{-2x_t} \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t} \frac{\partial v}{\partial x_t} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (2.2) se tiene

$$-\frac{1}{2}K\sigma^2\frac{\partial v}{\partial\tau} + \frac{1}{2}K^2e^{2x_t}\sigma^2\frac{1}{K}\left(e^{-2x_t}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}\right) + rKe^{x_t}e^{-x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t} - rKv = 0. \quad (3.13)$$

Simplificando y agrupando términos se llega a

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} + \frac{\partial v}{\partial x_t} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x_t} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}v = 0. \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta la sustitución (3.3) la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} + (\kappa - 1)\frac{\partial v}{\partial x_t} - \kappa v. \quad (3.15)$$

Para obtener la ecuación de difusión se hace un nuevo cambio de variables de la siguiente manera:

$$v(x_t, \tau) = e^{\alpha x_t + \beta\tau} u(x_t, \tau). \quad (3.16)$$

De nuevo, calculando las derivadas parciales

$$\frac{\partial v}{\partial x_t} = \frac{\partial}{\partial x_t} e^{\alpha x_t + \beta\tau} u(x_t, \tau) = e^{\alpha x_t + \beta\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u \right), \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} = \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\frac{\partial v}{\partial x_t} \right) = e^{\alpha x_t + \beta\tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha^2 u \right), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} = e^{\alpha x_t + \beta\tau} \frac{\partial u}{\partial\tau} + u e^{\alpha x_t + \beta\tau} \beta = e^{\alpha x_t + \beta\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial\tau} + \beta u \right). \quad (3.19)$$

Reemplazando estas derivadas en la ecuación (3.15) se obtiene

$$\begin{aligned} e^{\alpha x_t + \beta\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial\tau} + \beta u \right) &= e^{\alpha x_t + \beta\tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha^2 u \right) \\ &\quad + (\kappa - 1)e^{\alpha x_t + \beta\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u \right) - \kappa e^{\alpha x_t + \beta\tau} u \\ \frac{\partial u}{\partial\tau} + \beta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha^2 u + (\kappa - 1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u \right) - \kappa u \\ \frac{\partial u}{\partial\tau} + u [\beta - \alpha^2 - (\kappa - 1)\alpha + \kappa] &= \frac{\partial u}{\partial x_t} (2\alpha + \kappa - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Eligiendo adecuadamente los parámetros α y κ de tal manera que $2\alpha + \kappa - 1 = 0$ y $\beta - \alpha^2 - (\kappa - 1)\alpha + \kappa$ se tiene que para

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\kappa - 1) \quad (3.21)$$

y

$$\beta = -\kappa - \alpha^2 = -\kappa - \left(-\frac{1}{2}(\kappa - 1)\right)^2 = -\kappa - \frac{1}{4}(\kappa^2 - 2\kappa + 1) = -\frac{1}{4}(\kappa + 1)^2, \quad (3.22)$$

la ecuación (3.20) se transforma en la expresin:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}, \quad -\infty < x_t < \infty, \quad \tau > 0, \quad (3.23)$$

cuya condición inicial se obtiene teniendo en cuenta el cambio variable (3.16) así

$$\begin{aligned} v(x_t, \tau) &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} u(x_t, \tau), \quad \text{si } \tau = 0 \\ v(x_t, 0) &= e^{\alpha x_t} u(x_t, 0) \\ u(x_t, 0) &= e^{-\alpha x_t} v(x_t, 0) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Usando (3.6)

$$\begin{aligned} u(x_t, 0) &= e^{-\alpha x_t} \max(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} \max(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}, 0) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por lo tanto

$$u(x_t, 0) = u_0(x_t) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}, 0\right) \quad (3.26)$$

De esta manera podemos relacionar a la solución $u(x_t, \tau)$ de la ecuación de difusión (**la cual es cantidad de calor en $\tau > 0$ en cada punto x_t**) con el valor intrínseco de la opción, x_t con el rendimiento del activo ajustado por precio de ejercicio y τ con el tiempo invertido yendo de la fecha de vencimiento hacia atrás.

Dado que $C(S_t, T) = \max(S_t - K, 0) = Kv(x_t, 0) = G(S_t)$ según (3.5), con $G(S_t)$ una función de clase C^2 en $[0, K]$ y de soporte compacto, y teniendo en cuenta el cambio de vareable (3.1), podemos escribir la condición inicial (3.24) de la ecuación (3.23) como:

$$u(x_t, 0) = e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} v(x_t, 0) = e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} \frac{1}{K} G(Ke^{x_t}) = u_0(x_t) \quad (3.27)$$

3.0.1. Transformada de Fourier

Debido a la no estacionariedad de las ecuaciones diferenciales estocásticas y más precisamente la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes se hace útil utilizar una transformada tiempo-frecuencia que pueda reflejar los cambios en frecuencia con respecto al tiempo mejorando los resultados de los métodos espectrales clásicos como Correlograma, Periodograma, Welch, Blackman-Tukey, etc.[28]

Sea la transformada de Fourier y su inversa dada por [29, 30]:

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \quad (3.28)$$

y

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw. \quad (3.29)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la solución $u(x_t, \tau)$ de la ecuación de difusión (3.23) se tiene:

$$U(w, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_t, \tau) e^{-iwx_t} dx_t = \mathcal{F} \{u(x_t, \tau)\}. \quad (3.30)$$

Realizando las derivadas parciales se tiene:

$$\frac{\partial U(w, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x_t, \tau)}{\partial \tau} e^{-iwx_t} dx_t = \frac{\partial U(w, \tau)}{\partial \tau}. \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial U(w, \tau)}{\partial x_t} = (-iw) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_t, \tau) e^{-iwx_t} dx_t = (-iw) U(w, \tau). \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 U(w, \tau)}{\partial x_t^2} = (-iw)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_t, \tau) e^{-iwx_t} dx_t = (-iw)^2 U(w, \tau). \quad (3.33)$$

Por lo tanto el problema se transforma en:

$$\frac{\partial U(w, \tau)}{\partial \tau} = (-iw)^2 U(w, \tau), \quad \tau \geq 0, \quad (3.34)$$

cuya condicion inicial es

$$U(w, 0) = \mathcal{F} \{u_o(x_t)\}. \quad (3.35)$$

Dado que solo aparece la derivada parcial con respecto a la variable τ , la solución para esta ecuación diferencial ordinaria es entonces

$$U(w, \tau) = c(w) e^{-w^2 \tau}, \quad \text{con } c(w) = U(w, 0) = \mathcal{F} \{u_o(w)\}, \quad (3.36)$$

entonces

$$\begin{aligned} U(w, \tau) &= U(w, 0) e^{-w^2 \tau}. \\ U(w, \tau) &= \mathcal{F} \{u_o(w)\} e^{-w^2 \tau}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

El objetivo ahora es aplicar la transformada inversa de Fourier para obtener la solución $u(x_t, \tau)$ de la siguiente manera:

$$u(x_t, \tau) = \mathcal{F}^{-1} \{U(w, \tau)\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{u_o(w)\} e^{-w^2 \tau} \right\}. \quad (3.38)$$

3.0.2. Convolución

La convolución entre dos funciones f y g denotada por $f * g$ se define como:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x-p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p) g(p) dp. \quad (3.39)$$

3.0.2.1. Teorema de la convolución

Si se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas por secciones, acotadas y absolutamente integrables en el eje x , entonces

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{g\}. \quad (3.40)$$

$$\mathcal{F}\{fg\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(a)\} \mathcal{F}\{g(w-a)\} da = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f(w)\} * \mathcal{F}\{g(w)\}. \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{fg\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\{f(a)\} \mathcal{F}^{-1}\{g(w-a)\} da \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{f(w)\} * \mathcal{F}^{-1}\{g(w)\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por lo tanto al aplicar el teorema (3.42) a la ecuación (3.38) para encontrar la función $u(x_t, \tau)$, se tiene

$$\begin{aligned} u(x_t, \tau) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{u_o(w)\} e^{-w^2\tau}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{u_o(a)\}\} \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-(x-a)^2\tau}\right\} da, \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{u_o(a)\}\} = u_o(a) \quad (3.44)$$

reemplazando en (3.43) se tiene

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_o(a) \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-(x-a)^2\tau}\right\} da, \quad (3.45)$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-x^2\tau}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2\tau} e^{iwx} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2\tau + iwx} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(w^2 - \frac{iwx}{\tau})} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\left((w - \frac{ix}{2\tau})^2 - (\frac{ix}{2\tau})^2\right)} dw \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(w - \frac{ix}{2\tau})^2} dw. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sea el cambio de variables

$$y' = \tau \left(w - \frac{ix}{2\tau} \right)^2, \quad (3.47)$$

despejando w

$$w = \left(\frac{y'}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{ix}{2\tau} \quad (3.48)$$

y diferenciando w se tiene:

$$dw = \frac{dy'}{2(\tau y')^{1/2}}. \quad (3.49)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-x^2\tau} \right\} &= \frac{e^{\frac{-x^2}{4\tau}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(w - \frac{ix}{2\tau})^2} dw \\ &= \frac{e^{\frac{-x^2}{4\tau}}}{2\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau \frac{y'}{\tau}} \frac{dy'}{(y')^{1/2}} \\ &= \frac{e^{\frac{-x^2}{4\tau}}}{2\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y'} (y')^{-1/2} dy', \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y'} (y')^{-1/2} dy = 2\sqrt{\pi} \quad (3.51)$$

reemplazando este resultado en (3.50) se tiene:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-x^2\tau} \right\} = \frac{e^{\frac{-x^2}{4\tau}}}{2\sqrt{2\pi\tau}} 2\sqrt{\pi} = \frac{e^{\frac{-x^2}{4\tau}}}{\sqrt{2\tau}} \quad (3.52)$$

sustituyendo estos resultados en la ecuación (3.45) se tiene

$$\begin{aligned} u(x_t, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_o(a) e^{\frac{-(x-a)^2}{4\tau}} da \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^K u_o(a) e^{\frac{-(x-a)^2}{4\tau}} da \end{aligned} \quad (3.53)$$

con $u_o(a)$ como la condición inicial.

Para evaluar la integral de (3.53) se hace el cambio de variable

$$z = \frac{a - x}{\sqrt{2\tau}}, \quad (3.54)$$

donde

$$a = z \left(\sqrt{2\tau} \right) + x, \quad da = \sqrt{2\tau} dz \quad (3.55)$$

y

$$(x - a)^2 = (-\sqrt{2\tau}z)^2, \quad (x - a)^2 = 2\tau z^2. \quad (3.56)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 u(x_t, \tau) &= \frac{\sqrt{2\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{K-x}{\sqrt{2\tau}}} u_o(z\sqrt{2\tau} + x) e^{\frac{-2\tau z^2}{4\tau}} dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{K-x}{\sqrt{2\tau}}} u_o(z\sqrt{2\tau} + x) e^{\frac{-z^2}{2}} dz.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Asi sustituyendo (3.57), (3.21) y (3.22) en la ecuación (3.16) se obtiene:

$$v(x_t, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{K-x}{\sqrt{2\tau}}} u_o(z\sqrt{2\tau} + x) e^{\frac{-z^2}{2}} dz \tag{3.58}$$

y usando los cambios de variable (3.3), (3.7), (3.8) y la ecuación (3.58) en (3.9) se tiene

$$\begin{aligned}
 C(S_t, t) &= K e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{1/2\sigma^2}-1\right)x_t - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{1/2\sigma^2}+1\right)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{K-x_t}{\sqrt{2\tau}}} u_o(z\sqrt{2\tau} + x_t) e^{\frac{-z^2}{2}} dz \\
 &= K e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{2r+\sigma^2}{\sigma^2}\right)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \\
 &\quad \cdot \int_{\frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{K-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}}} u_o\left(z\sqrt{2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)\right) e^{\frac{-z^2}{2}} dz \\
 C(S_t, t) &= \frac{K S_t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)}}{\sqrt{2\pi} K^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)}} e^{-\frac{\sigma^2}{8}\left(\frac{2r+\sigma^2}{\sigma^2}\right)^2(T-t)} \cdot \\
 &\quad \cdot \int_{\frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{K-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}}} u_o\left(z\sqrt{2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)\right) e^{\frac{-z^2}{2}} dz.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Además de $u_o(x_t)$

$$\begin{aligned}
 u_0(x_t) &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} \frac{1}{K} G(Ke^{x_t}) \\
 &= \frac{1}{K} G\left(Ke^{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}\right) e^{\frac{1}{2}\left(\frac{r}{1/2\sigma^2}-1\right)\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)} \\
 &= \frac{1}{K} G(S_t) \frac{S_t^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)}}{K^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)}}.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Por lo tanto una nueva formula que provee el precio de una opción de clase C^2 y de soporte compacto es:

$$C(S_t, t) = \frac{K^{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)} S_t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{8}\left(\frac{2r+\sigma^2}{\sigma^2}\right)^2 (T-t)} \int_{\frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{K-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}}} u_o\left(z\sqrt{2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}\right) e^{\frac{-z^2}{2}} dz, \quad (3.61)$$

con

$$u_0(x_t) = G(S_t) S_t^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)} K^{-1-\frac{1}{2}\left(\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}\right)}. \quad (3.62)$$

Capítulo 4

Método de Líneas y Método de Perturbación Homotópica

4.0.1. Aproximación de derivadas por diferencias divididas finitas

la expansión de una función $f(x)$ diferenciable en una serie de Taylor alrededor de un punto x_i esta definida como [31, pág 532]

$$f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (4.1)$$

La cual se usará para aproximar la derivada de la función en x_i a partir de los valores de la función en x_i y $x_i + h$. Si $h > 0$ (la ecuación (4.1) solo es valida delante del punto x_i) y si $h \ll 1$ (tan pequeña) como para despreciar los términos tercero, cuarto orden, etc., del lado derecho de la ecuación (4.1), entonces se puede aproximar la derivada de la función $f(x)$ en x_i , es decir, $f'(x_i)$ mediante **diferencias divididas hacia delante** así:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}. \quad (4.2)$$

Para las **diferencias divididas hacia atras** basta con restar h a x_i en (4.1), así

$$f(x_i - h) = f(x_i) - \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (4.3)$$

Como $h \ll 1$, entonces despejando $f'(x_i)$

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}. \quad (4.4)$$

Sumando (4.2) y (4.4)

$$\begin{aligned} 2f'(x_i) &\approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} + \frac{f(x_i) - f(x_i-h)}{h}, \\ 2f'(x_i) &\approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{h}, \end{aligned}$$

se obtiene la aproximación de $f'(x_i)$ mediante **diferencias divididas centrales** as

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}. \quad (4.5)$$

Si se desea aproximar la segunda derivada de $f(x)$ en x_i , es decir, $f''(x_i)$, se desprecian los términos quinto, sexto orden, etc., del lado derecho de la ecuaciones en diferencias divididas hacia delante y hacia atras, de tal manera que sumando las ecuaciones (4.1) y (4.3)

$$\begin{aligned} f(x_i+h) + f(x_i-h) &\approx f(x_i) + \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) \\ &\quad + f(x_i) - \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) \\ f(x_i+h) + f(x_i-h) &\approx 2f(x_i) + 2\frac{h^2}{2!}f''(x_i), \end{aligned}$$

se obtiene la aproximación de $f''(x_i)$ mediante **diferencias divididas centrales** as

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - 2f(x_i) + f(x_i-h)}{h^2}. \quad (4.6)$$

4.0.2. Aproximación de derivadas para funciones de 2 variables por diferencias divididas finitas

Sea la función $F = F(x, t)$, la serie de Taylor alrededor de un punto (x_i, t_j) con $h > 0$ y $b > 0$ esta dada por:

$$\begin{aligned} F(x_i, t_j) &\approx F(x_i, t_j) + h \frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial x} + b \frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial t} \\ &\quad + h^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial x^2} + 2hb \frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial x \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial t^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Las diferencias divididas hacia delante para la variables x_i y t_i son de la forma:

$$F(x_i+h, t_j) \approx F(x_i, t_j) + h \frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial x} + h^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \dots \quad (4.8)$$

$$F(x_i-h, t_j) \approx F(x_i, t_j) - h \frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial x} + h^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \dots \quad (4.9)$$

y

$$F(x_i, t_j + b) \approx F(x_i, t_j) + b \frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial t} + t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial t^2} + \dots \quad (4.10)$$

$$F(x_i, t_j - b) \approx F(x_i, t_j) - b \frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial t} + t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial t^2} + \dots \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta solo las derivadas de primer orden en las ecuaciones (4.8) a (4.11) se pueden aproximar las derivadas $\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial x}$ y $\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial t}$ mediante diferencias divididas hacia delante y hacia atras en (x_i, t_j) con $h > 0$ y $b > 0$ así:

diferencias divididas hacia delante en (x_i, t_j)

$$\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_i + h, t_j) - F(x_i, t_j)}{h}. \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{F(x_i, t_j + b) - F(x_i, t_j)}{b}, \quad (4.13)$$

diferencias divididas hacia atras en (x_i, t_j)

$$\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_i, t_j) - F(x_i - h, t_j)}{h}, h > 0. \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{F(x_i, t_j) - F(x_i, t_j - b)}{b}, b > 0. \quad (4.15)$$

Sumando ahora las ecuaciones (4.12) y (4.14) y las ecuaciones (4.13) y (4.15) y despues despejando las primeras derivadas parciales $\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial x}$ y $\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial t}$ se obtiene la aproximación por **diferencias divididas centrales** as:

$$\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial x} \approx \frac{F(x_i + h, t_j) - F(x_i - h, t_j)}{2h}. \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial F(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{F(x_i, t_j + b) - F(x_i, t_j - b)}{2b}. \quad (4.17)$$

Las segundas derivadas parciales de $F = F(x, t)$ en (x_i, t_j) quedan aproximadas mediante **diferencias divididas centrales** sumando las ecuaciones (4.8) y (4.9) y las ecuaciones (4.10) y (4.11) así:

$$\frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{F(x_i + h, t_j) - 2F(x_i, t_j) + F(x_i - h, t_j)}{h^2}. \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 F(x_i, t_j)}{\partial t^2} \approx \frac{F(x_i, t_j + b) - 2F(x_i, t_j) + F(x_i, t_j - b)}{b^2}. \quad (4.19)$$

4.0.3. Método de Líneas (MOL)

El método de líneas (MOL) es un procedimiento general para la solución de ecuaciones diferenciales parciales de forma numérica, se puede decir, que MOL calcula la solución

numérica de forma exacta, aunque el éxito al aplicarlo a un nuevo problema de PDE depende en cierta medida de la experiencia y la inventiva del analista, es decir, MOL no es un enfoque único, directo y claramente definido de los problemas de PDE, sino más bien, es un concepto general que requiere especificación de detalles para cada nuevo problema PDE [2–4].

La idea básica de MOL es reemplazar las derivadas en la PDE con aproximaciones algebraicas, estas estarán expresadas en términos ya no de dos variables independientes como por ejemplo x y t , sino en términos de una variable que por lo general es el tiempo t , de esta manera la solución consiste en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ODE que aproximan la PDE original, dicho sistema puede ser resuelto con algún algoritmo de integración de ODE, en este trabajo se usará el algoritmo ODE 45 de MATLAB, el cual está basado en el método de Runge-Kutta de orden 4 para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.0.4. Procedimiento del MOL aplicado a la ecuación difusión

Sea la ecuación con condiciones inicial y de frontera ver ejemplo en [32, pág 21]:

$$\begin{cases} u_t = \beta u_{xx} \\ u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) + 2x + 1, & 0 \leq x \leq a \\ u(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = 2, & 0 \leq t \leq T \end{cases}, \quad (4.20)$$

con $\beta = 10^{-5}$, $T = 12000$, $a = 1$.

Primero se definen los nodos en $x \in [0, a] = [0, 1]$ así:

$$x_i = i\Delta x, 0 \leq i \leq n+1, \Delta x = \frac{a}{n+1} = \frac{1}{n+1}. \quad (4.21)$$

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = a = 1,$$

donde cada x_n hace referencia a la semirecta **vertical** y se considera en ella una función de t , es decir, $u_n(t) = u(x_n, t)$. Como se observa, solo se hace una discretización en la variable x , pero no en la variable t , que sigue siendo continua. Razón por la cual el nombre dado a este procedimiento (MOL), que acaba obteniendo las soluciones (generalmente numéricas) a lo largo de las líneas $x = x_n$, $t \in [0, \infty)$.

Condición inicial

$$u(x_i, t = 0) = f(x_i) = 1. \quad (4.22)$$

Condición de Dirichlet

$$u(0, t) = u_o(t) = u_o = g_1(t) = 1. \quad (4.23)$$

Condición de Neumann

$$u_x(a, t) = u_x(1, t) = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} = g_2(t) = 2. \quad (4.24)$$

Sea $u(x_i, t) = u_i(t)$, entonces usando la ecuación (4.12) (*diferencias divididas hacia delante*) la ecuación (4.24) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x} &\approx \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = g_2(t), \end{aligned} \quad (4.25)$$

asi que despejando u_{i+1} se tiene:

$$u_{i+1} = \Delta x g_2(t) + u_i, \quad (4.26)$$

y para la segunda derivada parcial con respecto a x se usa la ecuación de *diferencias divididas centrales* (4.18) así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))}{(\Delta x)^2}, \\ \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación de difusión $u_t = \beta u_{xx}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} &= \beta \left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} \right), \\ \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} &= \frac{\beta}{(\Delta x)^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

El cual es un sistema de ecuaciones ordinarias ODE, cuya solución viene dada por las n funciones

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n-1}(t), u_n(t), \quad (4.29)$$

las cuales son una aproximación para $u(x_i, t)$ en los puntos $i = 1, 2, 3, \dots, n$ de la malla, teniendo en cuenta que las funciones u_0 y u_{n+1} son las condiciones de frontera dadas.

Para el caso del ejemplo con 5 puntos en la malla, los puntos van a estar distribuidos como: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = x_{n+1} = a$ y de esta manera las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = 4$ son:

$$u_0 = u(0, t) = 1 \quad y \quad u_{i+1} = 2\Delta x + u_i,$$

De esta manera la ecuación (4.28) se puede escribir en forma matricial:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} CF & \underbrace{Dirichlet}_{u_0} \\ & 0 \\ CF & \underbrace{Neumann}_{u_4} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

donde $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix}$, es un vector de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) cuyas soluciones $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ proporcionaran la temperatura en cada tiempo t_j .

Usando las condiciones de frontera $u_0 = g_1(t) = 1$ y $u_4 = \Delta x g_2(t) + u_3 = 2\Delta x + u_3$ y utilizando $s = \frac{\beta}{(\Delta x)^2}$ el sistema matricial viene dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} &= s \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\Delta x + u_3 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} &= s \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\Delta x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

El cual se puede escribir como:

$$\dot{\vec{u}} = A\vec{u} + \vec{b}. \quad (4.32)$$

$$\text{donde } A = s \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\Delta x \end{pmatrix}.$$

4.0.5. Procedimiento del MOL aplicado a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

La idea del Método de Líneas (MOL) es discretizar el valor del activo, usando una opcion de venta, se usara el metodo de diferencias divididas centrales para discretizar la variable del activo asi la ecuación (2.2)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r - rC = 0.$$

Para poder usar (MOL) se cambia la variable tiempo t , para ello se introduce la variable $\tau = T - t$, la cual ira hasta el tiempo de la expiración y $C(S_t, t) = C(S_t, T - \tau)$. Con este cambio de variable, la ecuación se transforma en una ecuación parabolica progresiva así:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} + S_t r \frac{\partial U}{\partial S_t} - rU. \quad (4.33)$$

Con condicion inicial:

$$U_i(0) = \max(K - S_i, 0) = f(S_i, K), \quad i = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (4.34)$$

la cual representa la solución del valor de una opción europea tipo put.

4.0.5.1. Discretización del valor del activo S y las condiciones inicial y de frontera de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Sea el ancho de cada intervalo dado por:

$$\Delta S = h = \frac{S_{max}}{M}, \quad (4.35)$$

donde M es el numero de particiones de S y S_{max} es el precio mas alto del activo S , de esta manera la variable S puede tomar los valores $0, h, 2h, \dots, Mh = S_{max}$, cada uno de estos, se supone son los valores del precio del activo, los cuales son un numero de precios de activos escogidos, espaciados igualmente h . [33]

El punto (i, j) en la malla formada por los puntos $ih, i = 0, 2, \dots, M$ y $j, j = 0, 1, \dots, T$ corresponden a los valores del activo S en un tiempo τ , de ahora en adelante $U_i(\tau)$ que representará el valor de la opción en (i, j) .

Usando las diferencias divididas centrales (4.5) y (4.6) al lado derecho de la ecuación (4.33) ésta se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{dU_i(\tau)}{d\tau} = & \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \left(\frac{C_{i-1}(\tau) - 2C_i(\tau) + C_{i+1}(\tau)}{h^2} \right) \\ & + rS_i \left(\frac{C_{i+1}(\tau) - C_{i-1}(\tau)}{2h} \right) - rC_i(\tau), \quad i = 1, 2, 3, \dots, M + 1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) que serán resueltas mediante algoritmos numericos.

Discretizando la condición inicial $U_i(0) = \max(K - S_i, 0) = f(S_i, K)$ [33] se tiene

$$\begin{aligned} U_i(0) &= f(S_i, K) = (ih, K) = \max(K - ih, 0), \\ U_i(0) &= K - ih, \quad i = 1, 2, \dots, M + 1. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Con las condiciones de frontera

$$U_0(\tau) = Ke^{-r\tau}, \quad U_M(\tau) = 0, \quad (4.38)$$

la ecuación $U_0(\tau) = Ke^{-r\tau}$ se deduce de reemplazar $S = 0$ en la ecuación (4.33) y (2.4).

Las ecuaciones (4.37) y (4.38) definen el valor de la opción put a los largo de tres puntos de la malla $S = 0$, $S = S_{mx} = hM$ y $t = T$

El sistema (4.36) con sus condiciones iniciales y de frontera puede escribirse en forma matricial como:

$$\frac{d\vec{U}_i(\tau)}{d\tau} = (\mathbf{A} + \mathbf{Y} + \mathbf{O})\vec{U}(\tau) + \vec{B}(\tau), \quad (4.39)$$

donde $\vec{U}(\tau)$ es el vector

$$\vec{U}(\tau) = \begin{pmatrix} U_1(\tau) \\ U_2(\tau) \\ \vdots \\ U_{M-1}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Las matrices \mathbf{A} , \mathbf{Y} y \mathbf{O} estan definidas como:

$$\mathbf{A} = \frac{\sigma^2}{2h^2} \begin{pmatrix} -2S_1^2 & S_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_2^2 & -2S_2^2 & S_2^2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & S_3^2 & -2S_3^2 & S_3^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & S_{M-2}^2 & -2S_{M-2}^2 & S_{M-2}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & S_{M-1}^2 & -2S_{M-1}^2 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{r}{2h} \begin{pmatrix} 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -S_2 & 0 & S_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -S_3 & 0 & S_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -S_{M-2} & 0 & S_{M-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & -S_{M-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{O} = -r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$$\vec{B}(\tau) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\sigma^2 S_1^2}{2h^2} - \frac{rS_1}{2h} \right) K e^{-r\tau} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

4.0.6. Método de Perturbación Homotópica (HPM)

Muchas de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales representan muchos problemas de la ciencia y la ingeniería, entre estas ecuaciones se pueden nombrar las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas las cuales tienen un comportamiento aleatorio que las hace usualmente muy difíciles de resolver por métodos analíticos y numéricos. Algunos métodos han sido usados para resolver algunos modelos estocásticos, entre ellos se pueden incluir el método de descomposición de Adomian (ADM) [34], Iteración Variacional, Discretización de Galerkin. En este trabajo se trabajará el Método de Perturbación Homotópica (HPM) [35, 36].

4.0.6.1. Descripción del método

Sea la ecuación diferencial no-lineal:

$$A(u) - f(\tau) = 0, \quad \tau \in \Omega. \quad (4.45)$$

Junto con las condiciones de frontera

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad \tau \in \Gamma, \quad (4.46)$$

donde A es un operador diferencial, B es un operador de frontera, $f(\tau)$ es una función analítica conocida y Γ es la frontera del dominio de Ω . El operador A puede ser generalmente dividido en dos operadores, L y N , donde L y N son operadores lineal y no-lineal respectivamente, entonces reescribiendo la ecuación (4.45) se tiene:

$$L(u) + N(u) - f(\tau) = 0, \quad \text{donde} \quad A(u) = L(u) + N(u), \quad (4.47)$$

la idea principal del HPM es construir una función

$$v(\tau, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaga las siguientes ecuaciones:

$$H(v, p) = (1 - p) [L(v) - L(v_0)] + p [A(v) - f(\tau)] = 0, \quad p \in [0, 1], \quad \tau \in \Omega, \quad (4.48)$$

la cual toma el aspecto:

$$\begin{aligned}
 H(v, p) &= L(v) - L(v_0) + pL(v_0) - pL(v) + p[A(v) - f(\tau)] = 0 \\
 &= L(v) - L(v_0) + pL(v_0) + p[A(v) - L(v) - f(\tau)] = 0 \\
 H(v, p) &= L(v) - L(v_0) + pL(v_0) + p[N(v) - f(\tau)] = 0,
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

donde p es llamado el **parámetro Homotópico**, y v_0 es una solución inicial aproximada de la ecuación (4.45) que satisface las condiciones de frontera.

La ecuación (4.49) puede reescribirse de la forma:

$$\begin{aligned}
 L(v) - L(v_0) &= -pL(v_0) - p[N(v) - f(\tau)] \\
 L(v) - L(v_0) &= p[f(\tau) - N(v) - L(v_0)] \\
 L(v) - L(v_0) &= p[A(v) - L(v_0)],
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

denominada la **ecuación Homotópica** [6].

Si se reemplaza $p = 0$ en la ecuación (4.48) y $p = 1$ en la ecuación (4.49) se tiene:

$$H(v, 0) = L(v) - L(v_0) = 0, \tag{4.51}$$

$$H(v, p) = A(v) - f(\tau) = 0. \tag{4.52}$$

El incremento de p de 0 hasta 1 es el mismo cambio de $v(\tau, p)$ desde $v_0(\tau)$ hasta $v(\tau)$. En topología esto es llamado *deformación* y $L(v) - L(v_0)$ y $A(v) - f(\tau)$ son llamadas *homotópicas*. El HPM usa el parámetro homotópico p como un parámetro de expansión para obtener una solución en series de potencias de la ecuación (4.48) y (4.49) de la siguiente manera:

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \dots \tag{4.53}$$

De acuerdo al HPM, la solución aproximada de la ecuación (4.45) se obtiene haciendo $p \rightarrow 1$ en la ecuación (4.53), así:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \tag{4.54}$$

la serie (4.54) es convergente para la mayoría de los casos y el radio de convergencia depende de $A(u) - f(\tau)$ [37].

4.0.7. Procedimiento del HPM aplicado a la ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker-Planck es un importante modelo estocástico que aparece en varios campos de ciencia natural, incluyendo óptica cuántica, física en estado sólido, química-física, biología teórica y teoría de circuitos. La ecuación de Fokker-Planck fue primero usada por Fokker y Planck [38] para describir el movimiento Browniano de partículas. Si una pequeña partícula de masa m es sumergida en un fluido, la ecuación de movimiento para la función de distribución $F(x, t)$ esta dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \gamma \frac{\partial F}{\partial v} + \gamma \frac{KT}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, \quad (4.55)$$

donde v es la velocidad del movimiento Browniano de una pequeña partícula, t es el tiempo, γ es la fracción constante, K es la constante de Boltzmann's y T es la temperatura del fluido [38]. Esta ecuación es usada en los campos de fuerza para estudiar la estabilidad de un plasma de colisiones y las partículas Browniano en movimiento a través de un medio a una temperatura fija.

En el caso de una variable, la ecuación Fokker-Planck no lineal se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial A(x, t, u)u}{\partial x} + \frac{\partial^2 (B(x, t, u)u)}{\partial x^2} \right], \quad (4.56)$$

con la condición inicial dada por

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.57)$$

si (ver ejemplo 3.1)

$$A(x, t, u) = \frac{2 - \frac{x}{2}}{t + x}, \quad (4.58)$$

y

$$B(x, t, u) = 1, \quad (4.59)$$

considerando (4.57) con

$$u(x, 0) = f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.60)$$

reemplazando en la ecuación (4.56)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial \left[\frac{2 - \frac{x}{2}}{t + x} \right] u}{\partial x} + \frac{\partial^2 (1u)}{\partial x^2} \right], \quad (4.61)$$

con la condición inicial

$$u_0(x, 0) = u(x, 0) = f(x). \quad (4.62)$$

Aplicando la técnica del HPM se tiene por la ecuación homotópica que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = p \left[-\frac{\partial \left[\frac{2-\frac{x}{2}}{t+x} \right] u}{\partial x} + \frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right], \quad (4.63)$$

asumiendo la solución de la ecuación en la forma (4.53), es decir:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \quad (4.64)$$

reemplazando (4.64) en la ecuación (4.63), resolviendo y agrupando los terminos de las mismas potencias de p se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = p \left[-\frac{\partial \left[\frac{2-\frac{x}{2}}{t+x} \right] (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots)}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots)}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Agrupando las potencias de p , es decir $p^0, p^1, p^2, p^3, \dots$ se tiene

$$p^0 : \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0,$$

$$\begin{aligned} p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial t} = & \left(\frac{1}{2} \frac{x \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}{(t+x)} + \frac{2u_0}{(t+x)^2} - \frac{2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}{(t+x)} + \frac{1}{2} \frac{u_0}{(t+x)} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{xu_0}{(t+x)^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2 : \frac{\partial u_1}{\partial t} = & \left(-\frac{2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)}{(t+x)} - \frac{1}{2} \frac{xu_1}{(t+x)^2} + \frac{1}{2} \frac{u_1}{(t+x)} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + \frac{2u_1}{(t+x)^2} + \frac{1}{2} \frac{x \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)}{(t+x)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^3 : \frac{\partial u_1}{\partial t} = & \left(-\frac{2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)}{(t+x)} + \frac{1}{2} \frac{u_2}{(t+x)} + \frac{1}{2} \frac{x \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)}{(t+x)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{xu_2}{(t+x)^2} + \frac{2u_2}{(t+x)^2} + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) \right), \end{aligned}$$

por lo tanto solucionando cada ecuación y sumando cada una de ellas se obtiene la solución aproximada de la ecuación (4.64)

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{1}{(t+x)^3} \left(-\frac{53}{4}x + \frac{1}{8}x^4 \right) \\
 & + \frac{1}{(t+x)^2} \left(\ln(t+x) \left[\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 11x - 12 \right] \frac{5}{8}x^3 + \frac{83}{8}x^2 - 47x + 52 \right) \\
 & + \frac{1}{(t+x)} \left(\ln(t+x) \left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{19}{2}x - 23 \right] + \frac{3}{8}x^2 - \frac{19}{2}x + 33 \right) \\
 & + \ln(t+x) \left[-x - \frac{1}{2} \right] - \frac{9}{2}\ln 2.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

4.0.8. Procedimiento del HPM aplicado a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Sea la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + Sr \frac{\partial C}{\partial S} - rC. \tag{4.66}$$

Con condición inicial:

$$C(S_t, T) = \max(K - S_t, 0) = f(S). \tag{4.67}$$

Para este ejercicio se tomará como condición inicial la siguiente función [39]:

$$f(S) = C_0(S, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}}. \tag{4.68}$$

Usando la ecuación homotópica (4.50) se tiene para la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C_0}{\partial t} = p \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + Sr \frac{\partial C}{\partial S} - rC - \frac{\partial C_0}{\partial t} \right], \tag{4.69}$$

dado que

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = \frac{\partial(S + \frac{1}{S^{7/5}})}{\partial t} = 0, \tag{4.70}$$

entonces la ecuación (4.69) se transforma en

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C_0}{\partial t} = p \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + Sr \frac{\partial C}{\partial S} - rC \right]. \tag{4.71}$$

Asumiendo la solución dada en series de potencias como

$$C = C_0 + pC_1 + p^2C_2 + p^3C_3 + \dots \tag{4.72}$$

reemplazando en la ecuación (4.71) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C_0}{\partial t} = p \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 (C_0 + pC_1 + p^2C_2 + p^3C_3 + \dots)}{\partial S^2} \right. \\ \left. + Sr \frac{\partial (C_0 + pC_1 + p^2C_2 + p^3C_3 + \dots)}{\partial S} \right. \\ \left. - r(C_0 + pC_1 + p^2C_2 + p^3C_3 + \dots) \right]. \end{aligned}$$

Realizando las operaciones indicadas para determinar las potencias de p se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C_0}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(p \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2} + p^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2} + p^3 \frac{\partial^2 C_2}{\partial S^2} + p^4 \frac{\partial^2 C_3}{\partial S^2} + \dots \right) \\ + Sr \left(p \frac{\partial C_0}{\partial S} + p^2 \frac{\partial C_1}{\partial S} + p^3 \frac{\partial C_2}{\partial S} + p^4 \frac{\partial C_3}{\partial S} + \dots \right), \\ - r(pC_0 + p^2C_1 + p^3C_2 + p^4C_3 + \dots) \end{aligned}$$

Como se realizó anteriormente tenemos:

$$p^0 : \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C_0}{\partial t} = 0.$$

Por lo tanto $C_0(s, t)$ esta dada por

$$C_0(s, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}} \quad (4.73)$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial C_0}{\partial S}$ y $\frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2}$, vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_0}{\partial S} &= 1 - \frac{7}{5} \frac{1}{S^{12/5}}, \\ \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2} &= \frac{7 \times 12}{25} \frac{1}{S^{17/5}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^1 : \frac{\partial C_1}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_0}{\partial S^2} + Sr \frac{\partial C_0}{\partial S} - rC_0 \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(\frac{7 \times 12}{25} \frac{1}{S^{17/5}} \right) + Sr \left(1 - \frac{7}{5} \frac{1}{S^{12/5}} \right) - r \left(S + \frac{1}{S^{7/5}} \right) \\ &= \frac{7 \times 6}{25} \sigma^2 \frac{1}{S^{7/5}} + rs - \frac{7}{5} \frac{r}{S^{7/5}} - rs - \frac{r}{S^{7/5}} \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} &= \frac{7 \times 6}{25} \sigma^2 \frac{1}{S^{7/5}} - \frac{12}{5} \frac{r}{S^{7/5}}, \end{aligned}$$

por lo tanto $C_1(S, t)$ esta dada por

$$C_1(S, t) = \left(\frac{42}{25} \sigma^2 \frac{1}{S^{7/5}} - \frac{12}{5} \frac{r}{S^{7/5}} \right) t = \frac{1}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t \quad (4.74)$$

hallando las derivadas parciales $\frac{\partial C_1}{\partial S}$ y $\frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_1}{\partial S} &= -\frac{7}{5} \frac{1}{S^{12/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t \\ \frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2} &= \frac{7 \times 12}{25} \frac{1}{S^{17/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p^2 : \frac{\partial C_2}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2} + Sr \frac{\partial C_1}{\partial S} - rC_1 \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(\frac{7 \times 12}{25} \frac{1}{S^{17/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t \right) + Sr \left(-\frac{7}{5} \frac{1}{S^{12/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t \right) \\ &\quad - r \left(\frac{1}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t \right) \\ &= \frac{42}{25} \sigma^2 \frac{1}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t - \frac{7}{5} \frac{r}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t - \frac{r}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t \\ &= \frac{42}{25} \sigma^2 \frac{1}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t - \frac{12}{5} \frac{r}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} &= \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{1}{S^{7/5}} t\end{aligned}$$

por lo tanto $C_2(S, t)$ esta dada por

$$C_2(S, t) = \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{1}{S^{7/5}} \frac{t^2}{2} = \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) C_1(S, t) \frac{t}{2} \quad (4.75)$$

las derivadas parciales $\frac{\partial C_2}{\partial S}$ y $\frac{\partial^2 C_2}{\partial S^2}$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_2}{\partial S} &= -\frac{7}{5} \frac{1}{S^{12/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{t^2}{2} \\ \frac{\partial^2 C_2}{\partial S^2} &= \frac{7 \times 6}{25} \frac{1}{S^{17/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 t^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p^3 : \frac{\partial C_3}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial S^2} + Sr \frac{\partial C_2}{\partial S} - rC_2 \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(\frac{7 \times 6}{25} \frac{1}{S^{17/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 t^2 \right) + Sr \left(-\frac{7}{5} \frac{1}{S^{12/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{t^2}{2} \right) \\ &\quad - r \left(\left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{1}{S^{7/5}} \frac{t^2}{2} \right) \\ &= \frac{42}{25} \sigma^2 \frac{1}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{t^2}{2} - \frac{7}{5} \frac{r}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{t^2}{2} - \frac{r}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{t^2}{2} \\ &= \frac{42}{25} \sigma^2 \frac{1}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{t^2}{2} - \frac{12}{5} \frac{r}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{t^2}{2} \\ \frac{\partial C_3}{\partial t} &= \left(\frac{42}{25} \sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^3 \frac{1}{S^{7/5}} \frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

por lo tanto $C_3(S, t)$ esta dada por

$$C_3(S, t) = \left(\frac{42}{25}\sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^3 \frac{1}{S^{7/5}} \frac{t^3}{2 \times 3} = \left(\frac{42}{25}\sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) C_2(S, t) \frac{t}{3} \quad (4.76)$$

en general la solución de la ecuación de Black-Scholes $C(S, t)$ viene dada por la aproximación

$$C(S, t) = C_0(S, t) + C_1(S, t) + C_2(S, t) + C_3(S, t) + \dots \quad (4.77)$$

Reemplazando los resultados anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} C(S, t) = & S + \frac{1}{S^{7/5}} + \frac{1}{S^{7/5}} \left(\frac{42}{25}\sigma^2 - \frac{12r}{5} \right) t \\ & + \left(\frac{42}{25}\sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^2 \frac{1}{S^{7/5}} \frac{t^2}{1 \times 2} \\ & + \left(\frac{42}{25}\sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^3 \frac{1}{S^{7/5}} \frac{t^3}{1 \times 2 \times 3} + \dots \end{aligned} \quad (4.78)$$

la cual se puede escribir en terminos de sumatoria como

$$C(S, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{42}{25}\sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^n \frac{t^n}{n!} \right) \quad (4.79)$$

Ejemplo: Consideremos el caso cuando la volatilidad es $\sigma = 0,2$ y $r = 0,01$, la $C(S, t)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$C(S, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (0,0432)^n \frac{t^n}{n!} \right) \quad (4.80)$$

Capítulo 5

Aplicaciones

El proposito de este capitulo es mostrar numéricamente los resultados de los ejemplos resueltos analíticamente en el capitulo anterior y otros planteados en este capitulo; cada una de las gráficas y tablas mostradas describen las soluciones de cada una de las ecuaciones con sus condiciones iniciales y de frontera, en algunos de ellos se variarán parámetros para observar el comportamiento de la solución bajo estas variaciones.

5.0.1. Método de Líneas aplicado a la ecuación difusión

Ejemplo: Sea la ecuación de difusión con condiciones inicial y de frontera

$$\begin{cases} u_t = \beta u_{xx} \\ u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) + 2x + 1, \quad 0 \leq x \leq a \\ u(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = 2, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (5.1)$$

con $\beta = 10^{-5}$, $T = 12000$, $a = 1$,

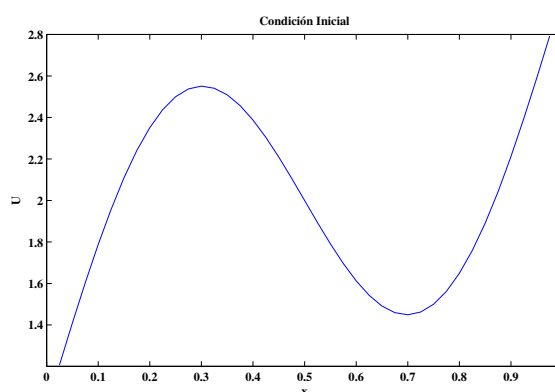


FIGURA 5.1: Gráfica de la condición inicial a lo largo del tiempo

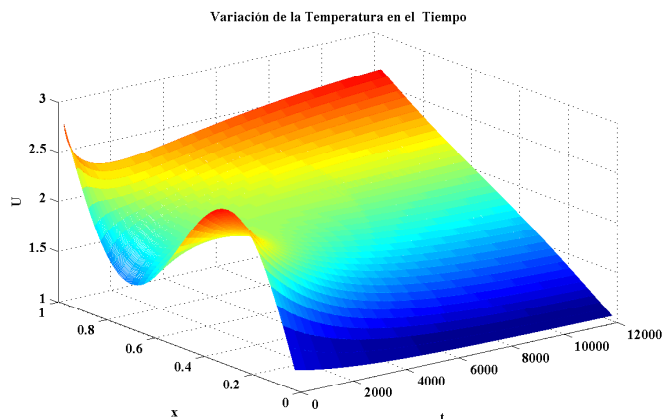


FIGURA 5.2: Solución numérica de la ecuación de difusión

5.0.2. Método de Líneas aplicado a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Considerar una opción Put europea con no pago de dividendos cuando el precio Strike, $K = 50$, con la tasa libre de riesgo $r = 10\%$ por año, y la volatilidad $\sigma = 40\%$ por año. Realizar una tabla que muestre los resultados tomando, $M = 20$ (particiones de S) y $\Delta S = h = 5$ (ancho de cada partición ΔS). El precio de la opción es evaluado en \$5 para cada partición entre \$0 y \$100, con $S \in [0, 100]$. La vida útil de la opción es de 5 meses con partición cada medio mes, con $N = 10$ (particiones de t). [40, pág 212].

Se observa en la matriz como los valores del precio de la opción Put C para $M = 20$ particiones del activo S obtenidos numéricamente tienden a cero cuando S es muy grande, verificando así la tendencia de este tipo de opción.

S	T=0	T=0,04167	T=0,08333	T=0,12500	T=0,16667	T=0,20833	T=0,25000	T=0,29167	T=0,33333	T=0,37500
5,26316	45,00000	44,81289	44,62656	44,44100	44,25622	44,07220	43,88895	43,70646	43,52472	43,34375
10,52632	40,00000	39,81179	39,62436	39,43771	39,25183	39,06671	38,88236	38,69877	38,51594	38,33387
15,78947	35,00000	34,81070	34,62217	34,43442	34,24744	34,06123	33,87578	33,69110	33,50717	33,32400
21,05263	30,00000	29,80960	29,61998	29,43113	29,24306	29,05576	28,86924	28,68352	28,49862	28,31455
26,31579	25,00000	24,80850	24,61779	24,42788	24,23883	24,05075	23,86380	23,67814	23,49397	23,31148
31,57895	20,00000	19,80741	19,61577	19,42558	19,23763	19,05277	18,87178	18,69526	18,52363	18,35717
36,84211	15,00000	14,80666	14,61754	14,43708	14,26827	14,11239	13,96942	13,83862	13,71889	13,60898
42,10526	10,00000	9,81469	9,66717	9,56118	9,48911	9,44206	9,41265	9,39536	9,38628	9,38266
47,36842	5,00000	4,95097	5,05488	5,20506	5,36240	5,51317	5,65321	5,78194	5,89999	6,00832
52,63158	0,00000	1,05564	1,70271	2,15605	2,50528	2,79137	3,03509	3,24803	3,43734	3,60773
57,89474	0,00000	0,15900	0,44563	0,74126	1,01621	1,26586	1,49207	1,69793	1,88636	2,05981
63,15789	0,00000	0,02008	0,10098	0,22679	0,37510	0,53164	0,68870	0,84237	0,99081	1,13326
68,42105	0,00000	0,00230	0,02102	0,06454	0,13025	0,21211	0,30447	0,40301	0,50469	0,60746
73,68421	0,00000	0,00025	0,00416	0,01757	0,04351	0,08186	0,13082	0,18819	0,25182	0,31994
78,94737	0,00000	0,00003	0,00080	0,00466	0,01420	0,03094	0,05521	0,08653	0,12399	0,16658
84,21053	0,00000	0,00000	0,00015	0,00122	0,00457	0,01156	0,02305	0,03940	0,06052	0,08603
89,47368	0,00000	0,00000	0,00003	0,00032	0,00146	0,00429	0,00955	0,01779	0,02924	0,04390
94,73684	0,00000	0,00000	0,00001	0,00008	0,00046	0,00157	0,00388	0,00782	0,01366	0,02153
100,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00002	0,00014	0,00051	0,00138	0,00295	0,00538	0,00877

FIGURA 5.3: Matriz de la solución numérica Opción Put

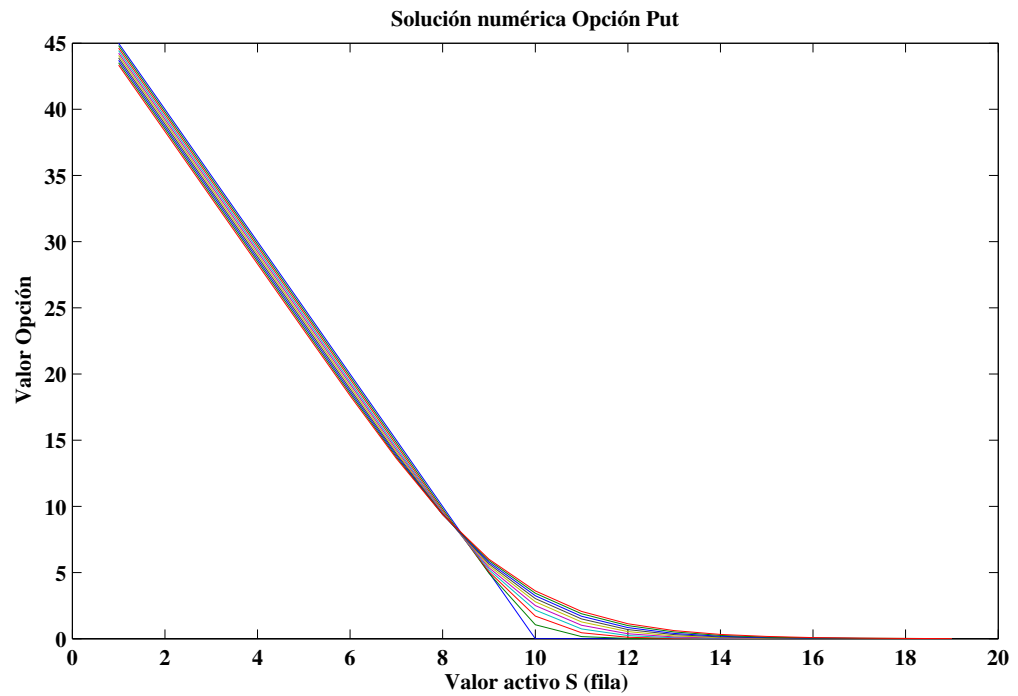


FIGURA 5.4: Gráfica de la solución numérica Opción Put

Cada curva corresponde a los datos de cada columna en la matriz opción Put numérica para diferentes valores de tiempo T . Una curva se compone de 20 datos representando la partición del activo en el eje horizontal y el valor de la opción en el eje vertical. Se observa que todas las curvas coninciden en un mismo punto (Valor activo S - Valor opción C) de manera aproximada para la partición $M = 8,15$ correspondiente a $S = 51$ en el activo y un valor de opción $C = 8,8$.

5.0.3. Método de perturbación Honotópica aplicado a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Sea la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + Sr \frac{\partial C}{\partial S} - rC,$$

con condición inicial:

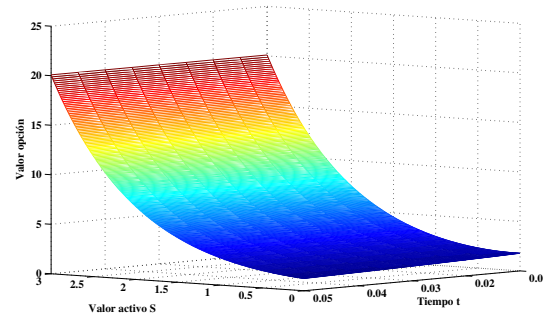
$$C(S_t, T) = \max(K - S_t, 0) = f(S) = C_0(s, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}}.$$

Cuya solución usando HPM es:

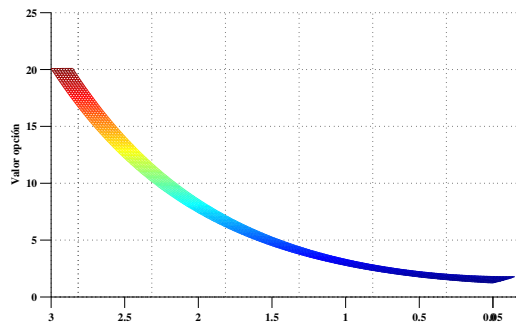
$$C(S, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{42}{25}\sigma^2 - \frac{12r}{5} \right)^n \frac{t^n}{n!} \right).$$

A continuación se mostrarán los resultados numéricos de la solución para diferentes valores de la volatilidad σ y la condición inicial $C_0(s, t)$.

Considerando el caso cuando la volatilidad es $\sigma = 0,2$, $r = 0,01$ y $C_0(s, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}}$



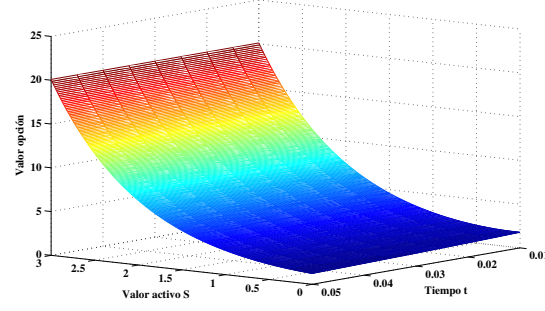
(a)



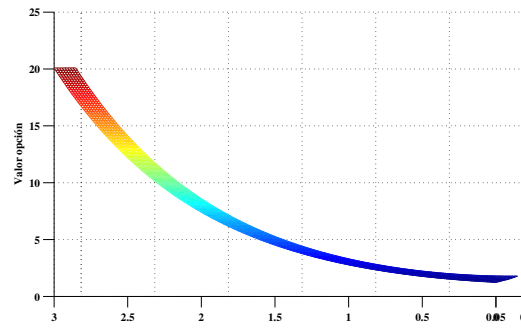
(b)

FIGURA 5.5: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial de Black-Scholes con condición inicial $C_0(s, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}}$ y $\sigma = 0,2$

Considerando el caso cuando la volatilidad es $\sigma = t^2 r^2$, $C_0(s, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}}$ y $r = 0,01$



(a)



(b)

FIGURA 5.6: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial de Black-Scholes con condición inicial $C_0(s, t) = S + \frac{1}{S^{7/5}}$ y $\sigma = t^2 r^2$

Considerando el caso cuando la volatilidad es $\sigma = 0,2$, $C_0(s, t) = St^2 + \frac{t}{S^{7/5}}$ y $r = 0,01$

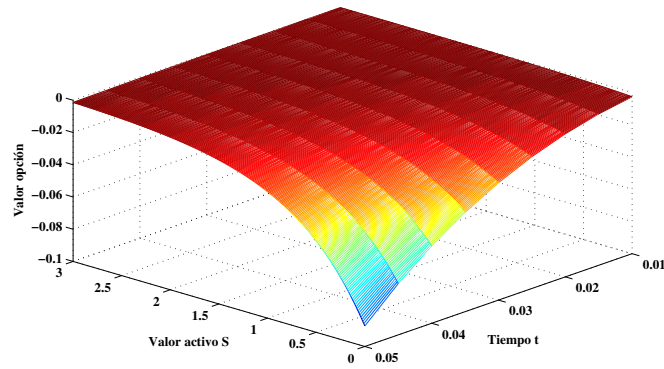


FIGURA 5.7: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial de Black-Scholes con condición inicial $C_0(s, t) = St^2 + \frac{t}{S^{7/5}}$ y $\sigma = 0,2$

Considerando el caso cuando la volatilidad es $\sigma = t^2 r^2$, $C_0(s, t) = St + \frac{1}{s^{7/5}}$ y $r = 0,01$

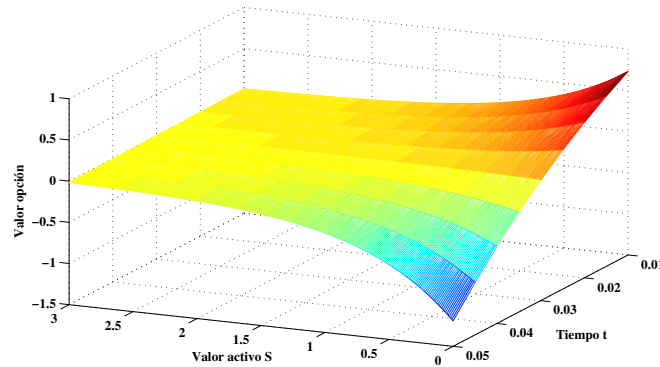


FIGURA 5.8: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial de Black-Scholes con condición inicial $C_0(s, t) = St + \frac{1}{s^{7/5}}$ y $\sigma = t^2 r^2$

Como se puede observar en las figuras (5,5) y (5,6) no hay variaciones en el valor de la opción para valores de volatilidades diferentes, pero en las figuras (5,7) y (5,8) el valor cambia para condiciones iniciales diferentes, con lo que se puede concluir que el método HPM es un método que depende de la condición inicial del problema, lo que analíticamente se demostró al ser un método recursivo que dependía de la condición inicial.

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

- Se planteó un teorema de la volatilidad debido a que el valor del precio de la opción obtenido de la manera clásica cambia para diferentes valores de la volatilidad, es decir para valores muy grandes y valores muy pequeños.
- Se encontró una diferencia significativa de la solución analítica de la ecuación diferencial de Black-Scholes obtenida de forma clásica y mediante la transformada de Fourier, mostrando ser analíticamente mas ligera la transformada de Fourier.
- Se encontró una solución numérica, a través de los métodos de líneas y perturbación homotópica a la ecuación diferencial parcial que origina el modelo de Black-Scholes por medio de algoritmos numéricos.
- Se observó que la volatilidad σ en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias planteado por el método de líneas en la ecuación diferencial de Black-Scholes debe ser constante, ya que la escogencia de una volatilidad variable implica el adecuado dimensionamiento de la nueva matriz para que los productos matriciales tengan sentido.
- Se observó en el método de perturbación homotópica HPM aplicado a la ecuación diferencial de Black-Scholes depende de la condición inicial. El método se hace mas robusto o mas ligero analíticamente debido a su dependencia de la derivada parcial en la condición inicial. En otras palabras, se puede decir que el método HPM depende principalmente de la condición inicial por ser este un método recursivo.

- La solución de la ecuación diferencial de Black-Scholes obtenida por el método HPM usando el método numérico aquí utilizado permitió simular la solución variando diferentes parámetros como la volatilidad, la tasa de interés libre de riesgo y volatilidad expresada en términos del tiempo y la tasa de interés libre de riesgo.

6.2. Recomendaciones

- Debido a la no estacionariedad de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes y a su energía asociada, se hace útil utilizar una transformada tiempo-frecuencia que pueda reflejar los cambios en frecuencia con respecto al tiempo por lo que el futuro se usar otras transformadas integrales como por ejemplo la transformada Wavelet o la transformada Wigner Ville para determinar una solución analítica-numérica.

Bibliografía

- [1] Francisco Venegas Martínez. *Riesgos financieros y económicos*. Cengage Learning Editores, 2006.
- [2] Graham Griffiths and William E Schiesser. *Traveling wave analysis of partial differential equations: numerical and analytical methods with MATLAB and Maple*. Academic Press, 2010.
- [3] William E Schiesser and Graham W Griffiths. *A compendium of partial differential equation models: method of lines analysis with Matlab*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] William E Schiesser. *The numerical method of lines: integration of partial differential equations*. Elsevier, 2012.
- [5] Ji-Huan He. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and computation*, 135(1):73–79, 2003.
- [6] Syed Tauseef Mohyud-Din and Muhammad Aslam Noor. Homotopy perturbation method for solving partial differential equations. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 64(3-4):157–170, 2009.
- [7] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pages 637–654, 1973.
- [8] E d Economía. La gran enciclopedia de la economía. *Obtenido de <http://www.economia48.com/spa/d/covarianza/covarianza.htm>*, 2009.
- [9] Ricardo A Tagliafichi. La volatilidad, su cálculo y su incidencia en los precios de los derivados. 2008.
- [10] Claudia Bahi. Modelos de medición de la volatilidad en los mercados de valores: Aplicación al mercado bursátil argentino. *Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ciencias Económicas*, 2007.
- [11] Sandra Isabel Núñez Vargas. Adaptación del modelo black-scholes en la simulación de un portafolio de acciones. 2011.

- [12] Marlo Carranza Purca. *Tratamiento numérico y aplicación de la ecuación de advección-difusión*. PhD thesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Lima), 2009.
- [13] Nikolay Sukhomlin. Simetría y nuevas soluciones de la ecuación de black scholes. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, XI(2):175–189, 2004.
- [14] Nikolay Sukhomlin. Ley de conservación del precio final en el modelo de black scholes. *Revista de Economía*, (17-18), 2006.
- [15] John Freddy Moreno Trujillo. Transformaciones integrales y sus aplicaciones en finanzas. *ODEON*, (9):257–265, 2016.
- [16] JF Harper et al. Reducing parabolic partial differential equations to canonical form. *European Journal of Applied Mathematics*, 5(2):159–164, 1994.
- [17] George Adomian, N Bellomo, and R Riganti. Semilinear stochastic systems: Analysis with the method of the stochastic green’s function and application in mechanics. *Journal of mathematical analysis and applications*, 96(2):330–340, 1983.
- [18] Cesar Emilio Contreras Piedragil and Francisco Venegas-Martínez. Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables. *Estocástica*, 1(1): 55–71, 2011.
- [19] Guadalupe Nayeli Pérez Domínguez. *Aplicación de la Transformada de Fourier a la Valoración de Opciones Financieras*. PhD thesis, 2012.
- [20] Desmond J Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM review*, 43(3):525–546, 2001.
- [21] Julián Fernández Bonder and Pablo Groisman. Explosiones en ecuaciones diferenciales estocásticas. *FCEyN, UBA*, 2005.
- [22] Serafín Frache and Gabriel Katz. Aplicación del cálculo estocástico al análisis de la estructura temporal de las tasas de interés. *Universidad de la República, Facultad de Ciencias Sociales, Departamento de Economía*, 2004.
- [23] Ulises Cárcamo Cárcamo. Un curso rápido de cálculo estocástico para aplicaciones a modelos económicos. *Semestre Económico*, 7(14):130–147, 2004.
- [24] Ángel M León Valle. Procesos estocásticos en tiempo continuo y aplicaciones a los activos financieros derivados. 1998.
- [25] Dennis Nicanor Quispe Sánchez. La integral estocástica de ito y algunas aplicaciones al campo de las finanzasla. 2011.

- [26] Daniel W Stroock and Marc Yor. Remembering paul malliavin. *Notices of the AMS*, 58(4), 2011.
- [27] Ernesto Mordecki. Modelos matemáticos en finanzas: valuación de opciones. *Centro de Matemáticas. Facultad de Ciencias Montevideo, Uruguay*, 1998.
- [28] Javier Calpe Maravilla. Análisis de técnicas modernas de estimación espectral e identificación de sistemas en el estudio de ecg de superficie. 1993.
- [29] Robert T Seeley. *Introducción a las Series e Integrales de Fourier*. Reverté, 2004.
- [30] Antonio Bonafonte. Transformada de fourier. 2008.
- [31] Dominguez Sanchez Clicerio Federico and Nieves Hurtado Antonio. *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Grupo Editorial Patria, 2014.
- [32] Louise Olsen-Kettle. Numerical solution of partial differential equations, the university of queensland school of earth sciences centre for geoscience computing, <http://espace.library.uq.edu.au/view/uq:239427>. 2011.
- [33] Luis Fernando Plaza Galvez. Solución numérica de la ecuacion diferencial de black-scholes, por diferencias finitas, haciendo uso de scilab, xviii congreso colombiano de matemáticas, bucaramanga. 2011.
- [34] SA El-Wakil, MA Abdou, and A Elhanbaly. Adomian decomposition method for solving the diffusion–convection–reaction equations. *Applied mathematics and computation*, 177(2):729–736, 2006.
- [35] Ameen Alawneh and Kamel Al-Khaled. Numerical treatment of stochastic models used in statistical systems and financial markets. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(10):2724–2732, 2008.
- [36] Stilianos Markolefas. Standard galerkin formulation with high order lagrange finite elements for option markets pricing. *Applied Mathematics and Computation*, 195(2):707–720, 2008.
- [37] Ji-Huan He. Homotopy perturbation technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 178(3):257–262, 1999.
- [38] Hannes Risken. The fokker-planck equation. methods of solution and applications, vol. 18 of. *Springer Series in Synergetics*, 1989.
- [39] Minqiang Li. Approximate inversion of the black–scholes formula using rational functions. *European Journal of Operational Research*, 185(2):743–759, 2008.
- [40] John C Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India, 2006.